УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2023, Т. 165, кн. 2
С. 132–142

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.9

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.132-142

РЕШЕНИЯ ДИРИХЛЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

Н. П. Евлампиев[1], *В. С. Мокейчев*[2], *И. Е. Филиппов*[2]

[1]*ООО "Блиц-М", г. Казань, 420066, Россия*

[2]*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

Аннотация

Получены необходимые и достаточные условия существования решения Дирихле, разработан метод для вычисления решений Дирихле функционально-дифференциального уравнения с незапаздывающим линейным отклонением аргумента.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, решение Дирихле, опережение аргумента, линейное отклонение аргумента, символ псевдодифференциального оператора

Введение

Среди дифференциальных уравнений (кратко ДУ) одного аргумента, не являющихся обыкновенными, наибольшее развитие получили ДУ с отклонениями аргумента. Это ДУ вида

$$P(t,d/dt)y(t)=\Phi\Big(t,y(h_0(t)),...,y^{(n)}(h_n(t))\Big),\ t\geq 0, \tag{1.1}$$

где

$$P(t,d/dt)y(t)=y^{(n)}(t)+\sum_{j=0}^{n-1}C_j(t)y^{(j)}(t),$$

$\Phi(t,x_1,...,x_{n+1}),\ C_j(t),\ h_j(t)$ – известные функции, не зависящие от y. Функции $h_j(t)-t$ называются отклонениями аргумента. Если $h_j(t)-t\leq\tau<0$ при всех $t\geq 0$, то говорят, что ДУ – с запаздывающим аргументом.

Теория ДУ с запаздывающим аргументом практически не отличается от теории линейных обыкновенных ДУ. Убедимся в этом.

Положим известными $y(\xi)=\psi_0(\xi),...,y^{(n)}(\xi)=\psi_n(\xi)$ при $\xi\leq 0$. Чтобы вычислить $y(t),\ t\in[0,\tau]$, решим задачу Коши для обыкновенного ДУ

$$P(t,d/dt)y(t)=\Phi\Big(t,\psi(h_0(t)),...,\psi^{(n)}(h_n(t))\Big),\ t\in[0,\tau],\ y^{(j)}(+0)=y_{0,j},$$

$j=0,...,n-1$, в котором правая часть известна, а $y_{o,j}$ произвольно зафиксированы. Найдем $y(t),\ t\in[0,\tau]$, и $y(t)$ при $t\leq\tau$. Чтобы вычислить $y(t),\ t\in[\tau,\ 2\tau]$, следует использовать условия Коши $y^{(j)}(\tau+0)=y^{(j)}(\tau-0),\ j=0,...,n-1$. Получим $y(t)$ при $t\leq 2\tau$. Аналогично вычислим $y(t),\ t\leq k\tau,\ k=3,\dots$.

Если хотя бы одно отклонение не является запаздыванием, то проблема разрешимости ДУ (1.1) резко усложняется. Проблема разрешимости таких ДУ стала актуальной, когда появились математические модели, в которых одно из отклонений является опережением, то есть $h_k(t) - t > 0$. Методы решения таких ДУ изложены в [1]. Этого удалось добиться при $t \in (a, b)$ и конечных a, b после замены начальных условий Коши на $(b-a)$-периодические.

В случае $h_j(t) = \lambda_j t + a_j$, λ_j, a_j – числа при всех j, отклонения называются линейными. Отклонение $\lambda_j t - t$ аргумента $t > 0$ не может быть запаздыванием, если $\lambda_j > 1$.

Во втором параграфе обзорной статьи [2] С. Адамс пишет, что уравнение $f(qx) - f(x) = 0$, отмеченное Беббиджем в 1815 г., является первым "q-разностным" уравнением, появившимся в литературе. Там же Адамс отмечает, что в 1924 г. П. Фламаном [3] было проведено единственное тщательно выполненное исследование (с точки зрения аналитических решений) разрешимости уравнения $f^{(1)}(x) = a(x)f(qx) + b(x)$, $|q| < 1$, где $a(x)$ и $b(x)$ – аналитические в такой замкнутой односвязной области D, что $qx \in D$ при всех $x \in D$. По-видимому, ДУ Амбарцумяна $y^{(1)}t) + y(t) = by(\lambda t)$, $t \geq 0, \lambda > 1$, – первая математическая модель с линейным отклонением аргумента. Она построена в 1944 г. (подробности см. в [4, 5]). В этой модели $y(t)$ – плотность распределения случайной величины. Поэтому к ДУ Амбарцумяна добавлялись условия $y(t) \geq 0$, $\int\limits_0^{+\infty} y(t)dt = 1$. Полученную задачу мы называем задачей Амбарцумяна. Г. И. Русаков [5] записал решение задачи Амбарцумяна в виде функционального ряда. В работах [6–10] проведено дальнейшее изучение и обобщение задачи Амбарцумяна.

В настоящей статье изложена теория дифференциального уравнения

$$P(d/dt)y(t) + (P_1(d/dt)y)(\lambda t) = 0,\ t \geq 0,$$

в котором

$$P(\xi) = \xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + a_0,\ n \geq 1;$$

и

$$P_1(\xi) = \xi^q + b_{q-1}\xi^{q-1} + \cdots + b_0,\ q \geq 0,$$

– символы дифференциальных операторов $P(d/dt)$, $P_1(d/dt)$, $((d/dt)^k y)(\lambda t) = y^{(k)}(\lambda t)$, a_j, $b_j, \lambda > 1$ – числа. Всюду $N = \max(n, q)$.

1. Понятие λ-независимости

Определение 2.1. Числа d_1, d_2 называются λ-независимыми, если не существует целого p, при котором $d_1 = \lambda^p d_2$; в противном случае числа d_1, d_2 называются λ-зависимыми; а числа $d_1, ..., d_s$ – попарно λ-независимыми, если

$$d_k \neq \lambda^p d_j \text{ при всех } p \in Z \text{ и всех } k \neq j.$$

Здесь и далее Z – множество всех целых чисел.

Легко видеть, что в отличие от λ-независимости свойство λ-зависимости транзитивно, то есть если d_1, d_2 λ-зависимы и d_2, d_3 λ-зависимы, то d_1, d_3 λ-зависимы.

Определение 2.2. Подмножество $D_1, ..., D_l$ множества $D = \{d_1, ..., d_s\} \subset Z$ называется λ-разбиением D, если

1) $D_k \cap D_j = \emptyset$ при $k \neq j$, $\bigcup\limits_{k=1}^{l} D_k = D$;

2) из того, что $d_m \in D_k, d_j \in D_r$, следует, что d_m, d_j λ-зависимы при $k = r$ и λ-независимы при $k \neq r$.

Теорема 1. *Для каждого D существует λ-разбиение.*

Доказательство. Зафиксируем $d_1 \in D$ и найдем все числа $d_{r_1} \in D$, λ-зависимые от d_1. Полученное множество обозначим D_1. Если D/D_1 не пусто, то зафиксируем $d_2 \in D/D_1$ и найдем все λ-зависимые от d_2 числа $d_{r_2} \in D/D_1$. Полученное множество обозначим D_2. Продолжив этот процесс, докажем теорему. Отметим, что в случае конечности D количество множеств D_r также конечно, причём λ-разбиение единственно. $\square$

Здесь и далее $\square$ означает конец доказательства текущего результата.

2. Решение Дирихле уравнения $P(d/dt)y(t) = by(\lambda t),\ t \geq 0$

Определение 3.1. $y(t)$ называется решением Дирихле уравнения, если
1) существует такое a, что

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \exp{(a\lambda^k t)}, \tag{3.1}$$

α_k – некоторые постоянные;
2)

$$P(d/dt)y(t) \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} P(d/dt)\Big(\alpha_k \exp{(a\lambda^k t)}\Big) = by(\lambda t); \tag{3.2}$$

3) ряд сходится при каждом $t \geq 0$.
Число a в (3.1) называется показателем решения Дирихле.

Для приложений интересен случай $a < 0$. Наиболее просто решения Дирихле уравнения (3.2) находятся в случае, когда степень $P_1(\xi)$ равна нулю.

Теорема 2. *Справедливы утверждения:*
1) ДУ имеет решение Дирихле с показателем $a < 0 \Leftrightarrow$ имеет решение линейная система алгебраических уравнений

$$P(a\lambda^k)\alpha_k = b\alpha_{k-1},\ k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3.3}$$

2) Количество линейно независимых решений Дирихле уравнения (3.2) равно количеству попарно λ-независимых отрицательных корней символа $P(\xi)$.

Доказательство. Пусть $y_0(t)$ – решение вида (3.1) уравнения (3.2). Докажем, что α_k, $k = 0, 1, \ldots$, – решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (3.3).

В силу (3.2) имеем $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \beta_k \exp{(a\lambda^k t)} \equiv 0$, где $\beta_k = P(a\lambda^k)\alpha_k - b\alpha_{k-1}$, $\alpha_{-1} = 0$, причём $|\beta_k| \leq C$. Проинтегрировав это тождество q раз от 0 до $+\infty$, получим $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \beta_k \lambda^{-kq} \exp{(a\lambda^k t)} \equiv 0$. Зафиксируем q так, чтобы $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |\beta_k| \lambda^{-kq} < +\infty$. Тогда при каждом целом $r \geq 0$

$$\sum_{k=r+1}^{+\infty} \beta_k \lambda^{-kq} \exp{(a(\lambda^k - \lambda^r)t)} \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty.$$

С другой стороны, $\beta_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \beta_k \exp\left(a(\lambda^k - \lambda^0)t\right) = 0$. После перехода к пределу при $t \to +\infty$ получим $\beta_0 = 0$. Аналогично докажем, что $\beta_1 = 0$, и так далее. Поэтому $y_0(t)$ ненулевое, если $P(a\lambda^k) = 0$ при некотором k.

Обратно, пусть при некотором $a < 0$ существует $(\alpha_0, \alpha_1, ...)$ – ненулевое решение системы уравнений (3.3). Так как $\lambda > 1$, $a < 0$, $|P(a\lambda^k)| \to +\infty$ при $k \to +\infty$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \exp\left(a\lambda^k t\right)$ сходится, и его сумма – решение Дирихле для (3.2).

Отметим, что система уравнений имеет ненулевое решение только при тех показателях a, для которых

$$P(a\lambda^k) = 0 \quad \text{хотя бы при одном целом} \quad fk \geq 0. \tag{3.4}$$

Действительно, если $P(a\lambda^k) \neq 0$, $k = 0, 1, ...$, то из равенств (3.3) и $\alpha_0 = 0$ следует, что $0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots$. Итак, *если $P(\xi)$ не имеет отрицательных корней, то у (3.2) отсутствуют решения Дирихле с отрицательным показателем.*

Изучим два случая.

1) $P(\xi)$ имеет единственный отрицательный корень d_1. Положив $a = d_1, \alpha_0 = 1$, получим решение системы уравнений (3.3): $\alpha_0 = 1$, $\alpha_n = b^n \Big(\prod\limits_{j=1}^{n} P(d_1\lambda^k)\Big)^{-1}$, а значит, и решение Дирихле $y_{d_1}(t)$ с показателем $a = d_1$ для (3.2). Выясним, существует ли решение Дирихле с другим отрицательным показателем $a_0 < 0$.

Если $y_0(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \beta_k \exp\left(a_0\lambda^k t\right)$, то в силу теоремы 2 $P(a_0\lambda^k)\beta_k = b\beta_{k-1}$, $\beta_{-1} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Так как $P(\xi)$ имеет единственный отрицательный корень d_1, то $a_0\lambda^{k_0} = d_1$ при некотором целом $k_0 \geq 1$, и $P(a_0\lambda^k) \neq 0$, если $k \neq k_0$. Тогда $0 = b\beta_{k_0-1}$, $\beta_{k_0-2} = 0, ...$, $\beta_0 = 0$, $\beta_{k_0} = C_2$ – постоянная. Следовательно, $\beta_{k_0} = \alpha_0 C_2$, $\beta_{k_0+r} = \alpha_r C_2$, $r = 1, 2, ...$, $y_{a_0}(t) = C_2 y_{d_1}(t)$.

2) символ $P(\xi)$ имеет $m \geq 2$ отрицательных корней $d_1 > d_2 > \cdots > d_m$. В силу (3.4) система (3.3) имеет ненулевое решение только при следующих значениях показателя Дирихле: $a_{r,j} = d_j\lambda^{-r}$, $j = 1, ..., m$, $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Положим $a = d_1$ и рассмотрим систему уравнений

$$P(d_1)\alpha_0 = 0, ..., P(d_1\lambda^k)\alpha_k = b\alpha_{k-1}. \tag{3.5}$$

Если d_1 попарно λ-независимы от $\lambda_2, ..., \lambda_m$, то

$$P(d_1\lambda^k) \neq 0,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{3.6}$$

Действительно, в случае $P(d_1\lambda^{k_0}) = 0$ при некотором $k_0 \geq 1$ получим $d_1\lambda^{k_0} < d_1$ и $d_1\lambda^{k_0} = d_r$ для некоторого $r \leq m$, то есть d_1, d_r – λ-зависимы, что является противоречием.

В силу (3.6) система (3.5) имеет решение, определяемое равенствами (3.3) при $a = d_1, \alpha_0 = 1$, с помощью которого находится решение Дирихле $y_{d_1}(t)$ с показателем d_1. Как установлено в первом случае, каждое решение Дирихле с показателем $d_1\lambda^{-p}$, где $p \in Z$, имеет вид $C_3 y_{d_1}(t)$, C_3 не зависит от t.

Предположим, что d_1 λ-зависит от $d_j, j \geq 2$. Обозначим $I_1 = \{j : \lambda\text{-зависимы } d_1, d_J\}$. Отметим, что $1 \in I_1$, так как $d_1 = d_1\lambda^0$. Введём показатель Дирихле $d_0 = \min\limits_{j \in I_1} d_j$. Если бы существовало $k_0 \geq 1$, при котором $P(d_0\lambda^{k_0}) = 0$, то получили бы $\tilde{d_0} = d_0\lambda^{k_o} < d_0$, причём d_1, d_0 λ-зависимы. Тогда $d_1, \tilde{d_0}$ λ-зависимы, противоречие. Следовательно, $P(d_0\lambda^k) \neq 0$ при $k \geq 1$. Поэтому решение системы (3.6), в которой d_1 заменено на d_0, имеет вид $\alpha_0 = 1$, $\alpha_n = b^n \Big(\prod\limits_{j=1}^{n} P(d_0\lambda^k)\Big)^{-1}$, и ему соответствует решение Дирихле $y_{d_0}(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \exp(a\lambda^k t)$, так как имеет вид (3.1). Как и ранее, легко проверим, во-первых, что соответствующие $d_j \in I_1$ решения Дирихле уравнения (3.2) имеют вид $y_{d_j}(t) = C_j y_{d_0}(t)$, C_j не зависят от t. Во-вторых, показатель Дирихле $d_j\lambda^{-r}$ не индуцирует нового решения Дирихле, то есть $y_{d_0}(t) = C_j y_{d_j\lambda^{-r}}(t)$ при целых $r > 0, j \in I_1$.

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось записать максимальное количество линейно независимых решений Дирихле. Выделим λ-разбиение $D_1, ..., D_s$ множества $D = \{d_1, ..., d_m\}$ и зафиксируем наибольшее $a_j \in D_j$. Как было доказано ранее, все решения Дирихле, определяемые точками из D_j, с точностью до постоянного множителя совпадают с решением Дирихле $y_{a_j}(t)$. Поэтому линейно независимыми могут быть только $y_{a_1}(t), ..., y_{a_s}(t)$. Предположим, что $C_1 y_{a_1}(t) + \cdots + C_s y_{a_s}(t) \equiv 0$. Перепишем это равенство в виде

$$C_1\alpha_{0.1}\exp(a_1 t) + C_1\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_{k,1}\exp(a_1\lambda^k t) + \sum_{j=2}^{s} C_j \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{k,j}\exp(a_j\lambda^k t) \equiv 0,$$

то есть

$$C_1\alpha_{0.1} + C_1\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_{k,1}\exp((a_1\lambda^k - a_1)t) + \sum_{j=2}^{s} C_j \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{k,j}\exp((a_j\lambda^k - a_1)t) \equiv 0. \quad (3.7)$$

В этих формулах $0 > a_1 > \cdots > a_s$, $a_j\lambda^k - a_1 < 0$ при всех $k \geq 1$, $j \geq 1$. Поэтому после перехода к пределу при $t \to +\infty$ в (3.7) получим $C_1\alpha_{0,1} = 0$. Однако $\alpha_{0,1} \neq 0$, следовательно, $C_1 = 0$. Аналогично докажем $C_2 = \cdots = C_s = 0$. □

Замечание 3.1. В теореме 2 указано не только количество линейно независимых решений Дирихле ДУ (3.1), но и установлен их явный вид: каждому подмножеству D_j, $j = 1, ..., l$, λ-разбиения множества всех отрицательных корней символа $P(\xi)$ соответствует семейство решений Дирихле

$$C\Big(\exp(d_{j_0}t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b^k \prod_{j=1}^{k}(P(d_{j_0}\lambda^j))^{-1}\exp(d_{j_0}\lambda^k t)\Big),$$

C – произвольно зафиксированная постоянная, и $d_{j_0} = \min\limits_{d_k \in D_j} d_k$. В силу линейности ДУ (3.2), если $y_1(t), ..., y_s(t)$ – частные решения ДУ (3.2), то их линейная комбинация – также решение ДУ (3.2).

Замечание 3.2. Ненулевое решение Дирихле $y(t)$ ДУ (3.2) знакопостоянное в случае $sgnP(a\lambda^k) = sgn(b)$, $k = 1, 2, ...$, поэтому существует решение Дирихле $y(t)$, для которого $y(t) > 0$, $\int\limits_0^{+\infty} y(t)dt = 1$.

Замечание 3.3. Из приведенных рассуждений следует, что в (3.2) t можно считать комплексным аргументом: тогда вместо записи $Re\ a < 0$, $t \geq 0$ следует использовать $Re(at) < 0$.

Замечание 3.4. Пока неизвестно, существуют ли у ДУ (3.2) решения, не являющиеся решениями Дирихле.

3. Неоднородное ДУ

Речь пойдёт о ДУ

$$P(d/dt)x(t) = bx(\lambda t) + f(t),\ \lambda > 1, \tag{4.1}$$

в котором b, λ не зависят ни от x, ни от t, а $f(t)$ не зависит от $x(t)$.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \exp(a\lambda^k t), \quad Re(at) < 0, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k|\lambda^{-kn} < +\infty. \tag{4.2}$$

Напомним, n – степень многочлена $P(\xi)$. Из предположения (4.2), в частности, следует, что *аргумент в (4.1) можно считать комплексным.*

Предположим, что $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \beta_k \exp(a\lambda^k t)$ – решение ДУ (4.1), где β_k не зависят от t. Формальные действия приведут к равенствам

$$P(a\lambda^k)\beta_k = b\beta_{k-1} + f_k,\ k = 0, 1, ..., \tag{4.3}$$

где β_k не зависят от t. Так как $|P(\xi)| \geq |\xi|^n/2$ при $|\xi| \geq M_0$, то $|P(a\lambda^k)| \geq 2|\lambda^{kn}|$, если $k \geq M_1$. Следовательно,

$$|\beta_k| \leq |2b|\,|\lambda^{-kn}|\,|\beta_{k-1}| + 2|f_k|\,|\lambda^{-k}|$$

при всех $k \geq M_1$, и

$$S_{M,M_1} \equiv \sum_{k+M_1}^{M} |\beta_k| \leq 2|b|\,|\lambda^{-M_1}| \sum_{k=M_1-1}^{M} |\beta_{k-1}| + 2|f_k||\lambda^{-kn}|,$$

$$S_{M,M_1}(1 - 2|b|\lambda^{-M_1}) \leq 2|b|\lambda^{-M_1}|\beta_{M_1-1}| + \sum_{k=0}^{+\infty} 2|f_k||\lambda^{-kn}|.$$

Поэтому при всех достаточно больших M и некотором M_1 имеем $S_{M,M_1} \leq b_{M_1}$, где b_{M_1} не зависит от M, то есть ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \beta_k$ абсолютно сходится. Отсюда и из ограниченности $|\exp(a\lambda^k t)|$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \beta_k \exp(a\lambda^k t)$, так как $Re(at) < 0$. Таким образом, доказана

Теорема 3. *Если выполняется (4.2) и система уравнений (4.3) имеет решение, то ДУ (4.1) имеет решение Дирихле с показателем a.*

4. Общий случай

Речь пойдёт о ДУ

$$P(d/dt)y(t) = (P_1(d/dt)y)(\lambda t),\ t \geq 0,\ \lambda > 1,\ n > q. \tag{5.1}$$

Напомним, что n, q – степени многочленов $P(\xi)$, $P_1(\xi)$ соответственно. В случае $n \leq q$ заменой $\lambda t = \tau$ придём к уравнению "запаздывающего" типа.

В рассматриваемом случае под решением Дирихле с показателем a понимается функция

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \exp(a\lambda^k t), \tag{5.2}$$

где α_k не зависят от t и λ и удовлетворяют условиям $|\alpha_k| \le \lambda^j$ при некотором j,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(d/dt)\Big(\alpha_k \exp(a\lambda^k t)\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_1(d/d\tau)\Big(\alpha_k \exp(a\lambda^k \tau)\Big)|_{\tau=\lambda t}. \tag{5.3}$$

Теорема 4. *ДУ (5.1) имеет решение Дирихле с показателем $a < 0$ $\Leftrightarrow$ разрешима система уравнений*

$$P(a\lambda^k)\alpha_k = P_1(a\lambda^{k-1})\alpha_{k-1}, \ \alpha_{-1} = 0, \ k = 0, 1, 2, \dots . \tag{5.4}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2, докажем, что если ДУ (5.1) имеет решение Дирихле (5.2), то выполняются условия (5.4).

Предположим, что система (5.4) имеет решение. Очевидно, что при всех достаточно больших $k \ge M$ выполняются оценки $|P(a\lambda^k)| \ge (1/2)|a\lambda^k|^n$, $|P_1(a\lambda^k)| \le 2|a\lambda^k|^q$. Учитывая их и неравенство $\lambda > 1$, получим $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |\alpha_k| < +\infty$ и сходимость ряда из (5.2). Его сумма является решением Дирихле с показателем a для ДУ (5.1). $\square$

Ниже $D = \{d_{1,0}, ..., d_{m.0}\}$ – множество всех отрицательных корней символа $P(\xi)$, и $D_1, ..., D_l$ – его λ-разбиение.

Теорема 5. *Существуют $y_{d_1}(t), ..., y_{d_l}(t)$ – линейно независимые решения Дирихле с отрицательными показателями $d_j \in D_j, j = 1, ..., l$.*

Доказательство. Итак, $P(d_j) = 0$. Зафиксируем наибольшее k_j так, чтобы $P(d_j\lambda^{k_j}) = 0$, $P(d_j\lambda^k) \ne 0$ при $k \ge k_j + 1$. Легко проверить, что при $a = d_j$ решением системы уравнений (5.4) будет

$$\alpha_k = 0 \text{ при } k \le k_j - 1; \ \alpha_{k_j} = 1; \ \alpha_{k_j+r} = \prod_{s=1}^{r} \Big(P_1(d_j\lambda^{k_j+s-1})/P(d_j\lambda^{k_j+s})\Big), \ r = 1, 2, \dots . \tag{5.5}$$

Поэтому $y_{d_j}(t) = \exp(d_j\lambda^{k_j}t) + \sum\limits_{r=1}^{+\infty} \alpha_{k_j+r} \exp(d_{k_j}\lambda^{k_j+r}t)$ – решение Дирихле для ДУ (5.1) с показателем d_j.

Пусть $c \in D_j$, то есть $P(c) = 0$. Зафиксируем наибольшее k_c, при котором $P(b\lambda^{k_c}) = 0$, $P(c\lambda^{k_c+r}) \ne 0$, $r = 1, 2, \dots$. В этом случае при $a = c$ решением системы (5.4) будет

$$\tilde{\alpha}_k = 0 \text{ при } k \le k_c - 1; \ \tilde{\alpha}_{k_c} = 1; \ \tilde{\alpha}_{k_c+r} = \prod_{s=1}^{r} \Big(P_1(d_j\lambda^{k_c+s-1})/P(d_j\lambda^{k_c+s})\Big), \ r = 1, 2, \dots .$$

Так как d_j, c λ-зависимы, то $c = d_j\lambda^{k_0}$ при некотором целом k_0. Поэтому $P(d_j\lambda^{k_c+k_0}) = 0$, $P(d_j\lambda^{k_c+k_0+r}) \ne 0$, $r = 1, 2, \dots$. В силу (5.5) получим $k_c + k_0 \le k_1$. Если бы $k_c + k_0 < k_1$, то в силу $P(c\lambda^{k_c+r}) \ne 0$, $r = 1, 2, ...,$ при $r = k_1 - (k_c + k_0)$ получили бы $P(d_j\lambda^{k_1}) \ne 0$. Это противоречие. Следовательно, $k_c + k_0 = k_1$, и $y_c(t) = y_{d_j}(t)$.

Изменив j, получим решения Дирихле $y_{d_1}(t), ..., y_{d_l}(t)$ с наибольшими k_j, при которых $P(d_j\lambda^{k_j}) = 0,\ P(d_j\lambda^{k_j+r}) \neq 0,\ r = 1, 2, \dots$. Докажем их линейную независимость.

Числа $d_1\lambda^{k_1}, ..., d_l\lambda^{k_l}$ различные, так как в противном случае получили бы попарную λ-зависимость. Поэтому после перенумерации имеем

$$d_1\lambda^{k_1} > \cdots > d_l\lambda^{k_l}. \tag{5.6}$$

Предположим, что $C_1 y_{d_1}(t) \equiv \sum\limits_{j=2}^{l} C_j y_{d_j}(t),\ C_j$ не зависят от t. Тогда

$$C_1 = -C_1 \sum_{r=1}^{+\infty} \exp\left(d_1(\lambda^{k+r} - \lambda^k)t\right) + \sum_{j=2}^{l} C_j \sum_{r=0}^{+\infty} \alpha_{k_j} \exp\left(d_j\lambda^{k_j+r} - d_1\lambda^{k_1}\right)(t).$$

Переходя здесь к пределу при $t \to +\infty$ и учитывая, что $\lambda > 1,\ \sum |\alpha_k| < +\infty$, и условие (5.6), получим $C_1 = 0$. Аналогично докажем, что $C_j = 0$ при $j \geq 2$. $\square$

Замечание 5.1. Так как ДУ (5.1) линейное, то $A_1 y_{d_1}(t) + \cdots + A_l y_{d_l}(t)$ – решение ДУ (5.1) при каждых постоянных $A_1, ..., A_l$.

Замечание 5.2. Если $P_1(d_j\lambda^{k-1})/P(d_j\lambda^k) \geq 0$ при каждом $k \geq k_j + 1$, то ДУ (5.1) имеет решение $y(t) = C y_{d_j}(t)$ с постоянной C, удовлетворяющее условиям $y(t) \geq 0,\ \int\limits_0^{+\infty} y(t)dt = 1$, то есть $y(t)$ – плотность распределения случайной величины.

Замечание 5.3. Введём псевдодифференциальные операторы Q_1, Q_2, определяемые символами $Q_1(\xi), Q_2(\xi)$. Это означает, что $Q_j \exp(\xi t) = Q_j(\xi) \exp(\xi t)$ при всех ξ, t, причём $Q_j(\xi)$ не зависят от t. Если у символа $Q_1(\xi)$ имеется конечное количество отрицательных корней, $|Q_1(\xi)| \to +\infty$ при $\xi \to -\infty$, $\left|Q_2(a\lambda^{k-1})/Q_1(a\lambda^k)\right| \leq (|\xi| + 1)^c$, где $c < 0$ не зависит от ξ, то всё вышесказанное переносится на псевдодифференциальное уравнение $Q_1 y(t) = (Q_2 y)(\lambda t),\ \lambda > 1$.

Замечание 5.4. Для ДУ $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}(t + \tau_{0,j}) = \sum\limits_{j=0}^{q} b_j y^{(j)}(x + \tau_{1,q})\Big|_{x=\lambda\cdot t}$ с отклонениями аргумента символами являются

$$Q_1(\xi) = \sum_{j=0}^{n} a_j \xi^j \exp(\xi\tau_{0,j}),\ Q_2(\xi) = \sum_{j=0}^{q} b_j \xi^j \exp(\xi\tau_{1,j}).$$

Заключение

Получены необходимые условия существования решения задачи Дирихле, разработан метод вычисления решения Дирихле для функционально-дифференциального уравнения с незапаздывающим линейным отклонением аргумента.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030").

Литература

1. *Мокейчев В.С.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. 221 с.
2. *Adams C.R.* Linear q-difference equations // Bull. Am. Math. Soc. 1931. V. 37, No 6. P. 361–400.
3. *Flamant P.* Sur la forme des solutions d'une équation différentielle fonctionelle // C. R. Acad. Sci., Paris. 1924. V. 137. P. 1595–1597.
4. *Амбарцумян В.А.* Научные труды в 3 т. Ереван: Изд-во АН Армян. ССР, 1960. Т. 1. 430 с.
5. *Русаков Г.И.* Флуктуация яркости Млечного пути // Учен. зап. Ленингр. ун-та. Сер. Матем. наук. 1949. Вып. 18. С. 53–79.
6. *Мокейчев В.С., Евлампиев Н.П.* О решении на полуоси дифференциально-q-разностного уравнения // Изв. вузов. Матем. 1991. № 4. С. 44–47.
7. *Евлампиев Н.П., Мокейчев В.С., Филиппов И.Е.* Плотность распределения яркости света в случае поглощающих облаков // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2012. Т. 154, кн. 4. С. 126–129.
8. *Евлампиев Н.П., Сидоров А.М., Филиппов И.Е.* Об одном обобщении уравнения Амбарцумяна // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2014. Т. 156, кн. 4. С. 25–30.
9. *Евлампиев Н.П., Сидоров А.М., Филиппов И.Е.* Об одном функционально-дифференциальном уравнении // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158, кн. 2. С. 194–201.
10. *Evlampiev N.P., Sidorov A.M., Filippov I.E.* On a functional differential equation // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38, No 3. P. 588–593. URL: https://doi.org/10.1134/S1995080217030027.

Поступила в редакцию 1.04.2023
Принята к публикации 13.09.2023

Евлампиев Николай Петрович, директор

ООО "Блиц-М"

ул. Владимира Кулагина, д. 1, г. Казань, 420054, Россия

Мокейчев Валерий Степанович, доцент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *Valery.Mokeychev@kpfu.ru*

Филиппов Игорь Евгеньевич, доцент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *Igor.Filippov@kpfu.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 2, pp. 132–142

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.132-142

Dirichlet Solutions of Functional Differential Equations without Delay

N.P. Evlampiev[a], *V.S. Mokeichev*[b*], *I.E. Filippov*[b**]

[a]*OOO Blits-M, Kazan, 420054 Russia*
[b]*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*
E-mail: **Valery.Mokeychev@kpfu.ru*, ***Igor.Filippov@kpfu.ru*

Received April 1, 2023; Accepted September 13, 2023

Abstract

Necessary and sufficient conditions for the existence of a valid Dirichlet solution were obtained. A method was developed to find Dirichlet solutions of the functional differential equation with non-delayed linear argument deviation.

Keywords: functional differential equation, Dirichlet solution, advance of the argument, linear deviation of the argument, pseudo-differential operator symbol

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

References

1. Mokeichev V.S. *Differentsial'nye uravneniya s otklonyayushchimisya argumentami* [Differential Equations with Deviating Arguments]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1985. 221 p. (In Russian)
2. Adams C.R. Linear q-difference equation. *Bull. Am. Math. Soc.*, 1931, vol. 37, no. 6, pp. 361–400.
3. Flamant P. Sur la forme des solutions d'une équation différentielle fonctionelle. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1924, vol. 137, pp. 1595–1597. (In French)
4. Ambartsumyan V.A. *Nauchnye trudy* [Research Works]. Vol. 1. Yerevan, Izd. Akad. Nauk Arm. SSR, 1960. 430 p. (In Russian)
5. Rusakov G.I. Fluctuations in brightness of the Milky Way. *Uch. Zap. Leningr. Univ. Ser. Mat. Nauk*, 1949, no. 18, pp. 53–79. (In Russian)
6. Mokeichev V.S., Evlampiev N.P. Solution of a differential-q-difference equation on the semi-axis. *Sov. Math. (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved.)*, 1991, vol. 35, no. 4, pp. 42–45.
7. Evlampiev N.P., Mokeichev V.S., Philippov I.E. Density of distribution of light intensity in the case of absorbing clouds. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, vol. 154, no. 4, pp. 126–129. (In Russian)
8. Evlampiev N.P., Sidorov A.M., Philippov I.E. On a generalization of Ambartsumyan's equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2014, vol. 156, no. 4, pp. 25–30. (In Russian)

9. Evlampiev N.P., Sidorov A.M., Filippov I.E. On some functional-differential equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 2, pp. 194–201. (In Russian)

10. Evlampiev N.P., Sidorov A.M., Filippov I.E. On a functional differential equation. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 3, pp. 588–593. URL: https://doi.org/10.1134/S1995080217030027.

***Для цитирования*:** *Евлампиев Н.П., Мокейчев В.С., Филиппов И.Е.* Решения Дирихле функционально-дифференциальных уравнений не запаздывающего типа // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 2. С. 132–142. URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.132-142.

***For citation*:** Evlampiev N.P., Mokeichev V.S., Filippov I.E. Dirichlet solutions of functional differential equations without delay. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 2, pp. 132–142. URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.132-142. (In Russian)