

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.983: 517.986

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.384-396>

Один метод построения идемпотентов в унитарной алгебре

М. Хадур

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия**mahmoud.khadour.991@gmail.com*

Аннотация

Предложен метод построения идемпотентов в унитарной алгебре $\mathcal{A}$ с использованием n произвольных идемпотентов $P_1, \dots, P_n$ из этой алгебры. Исследованы свойства полученных идемпотентов $P = P(P_1, \dots, P_n)$; для $n = 2$ и $n = 3$ получен явный вид этих идемпотентов $A(P_1, P_2)$ и $B(P_1, P_2, P_3)$ соответственно. Показано, что отображения

$$P_2 \mapsto A(P_1, P_2), \quad f(P_2) = A(P_1, P_2) \quad \text{и} \quad P_3 \mapsto B(P_1, P_2, P_3), \quad g(P_3) = B(P_1, P_2, P_3)$$

сохраняют дополнения $^\perp$ и являются мультипликативными на широких классах пар идемпотентов. Для конечного следа φ на унитарной C^* -алгебре $\mathcal{A}$ имеем $\varphi(P(P_1, \dots, P_n)) = \varphi(P_n)$. Для проекторов $P_1, \dots, P_n$ из алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ предложенный метод дает новый проектор и позволяет построить некоторые частичные изометрии.

Ключевые слова: унитарная алгебра, C^* -алгебра, идемпотент, симметрия, проектор, частичная изометрия, след

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1438).

Для цитирования: Хадур М. Один метод построения идемпотентов в унитарной алгебре // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 384–396.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.384-396>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.384-396>

A method for constructing idempotents in a unital algebra

M. Khadour

Kazan Federal University, Kazan, Russia

mahmoud.khadour.991@gmail.com

Abstract

A method is proposed for constructing idempotents in a unital algebra $\mathcal{A}$ using n arbitrary idempotents $P_1, \dots, P_n$ from this algebra. The properties of the resulting idempotents $P = P(P_1, \dots, P_n)$ are investigated; for $n = 2$ and $n = 3$, explicit forms of the idempotents are obtained: $A(P_1, P_2)$ and $B(P_1, P_2, P_3)$, respectively. It is shown that the mappings

$$P_2 \mapsto A(P_1, P_2), f(P_2) = A(P_1, P_2) \quad \text{and} \quad P_3 \mapsto B(P_1, P_2, P_3), g(P_3) = B(P_1, P_2, P_3)$$

preserve the complements $^\perp$ and are multiplicative on wide classes of idempotent pairs. For a finite trace φ on a unital C^* -algebra $\mathcal{A}$, $\varphi(P(P_1, \dots, P_n)) = \varphi(P_n)$. For the projections $P_1, \dots, P_n$ from the von Neumann algebra $\mathcal{A}$, the method yields a new projection and enables the construction of some partial isometries.

Keywords: unital algebra, C^* -algebra, idempotent, symmetry, projection, partial isometry, trace

Acknowledgments. This study was carried out as a part of the Program for Development of the Scientific and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District (agreement no. 075-02-2024-1438).

For citation: Khadour M. A method for constructing idempotents in a unital algebra. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 384–396. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.384-396>. (In Russian)

Введение

В теории операторных алгебр большую роль играют комбинации операторов специального вида. Так, в [1, предложение 7] доказано, что каждый фактор фон Неймана в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ алгебраически порождается своими проекторами. В [2, следствие 1] аналогичный результат установлен для всех бесконечных факторов фон Неймана $\mathcal{M}$, т. е. показано, что

$$\mathcal{M} = \text{Lin}_{\mathbb{C}}\{P_1 P_2 P_3 P_4 : P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{M}^{\text{pr}}\}.$$

В [3, с. 334] доказано, что алгебра фон Неймана алгебраически порождается своими проекторами тогда и только тогда, когда она не имеет прямого бесконечномерного абелева

слагаемого. В частности, в [3, следствие 1] было показано, что

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \text{Lin}_{\mathbb{C}}\{P_1 P_2 : P_1, P_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}\}.$$

В [4] доказано, что каждый оператор в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве является суммой восьми идемпотентов. С использованием этого факта в [5] показано, что каждый оператор в сепарабельном пространстве является суммой шестидесяти четырех операторов с нулевыми квадратами (т. е. нильпотентов второго порядка). Там же доказано, что каждый оператор является линейной комбинацией двухсот пятидесяти семи проекторов. В [6] для необязательно сепарабельного случая показано, что каждый оператор является суммой пяти идемпотентов, и доказано, что каждый эрмитов оператор является вещественной линейной комбинацией двухсот шестидесяти восьми проекторов. В сепарабельном случае в [7] это число уменьшено до пяти проекторов и показано, что каждый эрмитов оператор является целочисленной комбинацией шести проекторов. Когда $\mathcal{H}$ сепарабельно и бесконечномерно, в [8] единым методом для $\Lambda = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$ показано, что

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \text{Lin}_{\mathbb{R}}\{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 : P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}\}.$$

Простой модификацией доказательства [8] число сомножителей можно уменьшить до пяти. В [3, с. 336] доказано, что для собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ выполняется равенство

$$\mathcal{M} = \text{Lin}_{\mathbb{R}}\{P_1 P_2 P_3 P_4 : P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{M}^{\text{pr}}\}.$$

Из теоремы 6 работы [6] следует, что собственно бесконечная алгебра фон Неймана $\mathcal{M} = \text{Lin}_{\mathbb{C}}\mathcal{M}^{\text{pr}}$. В [9] показано, что произвольная алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ совпадает со множеством всех линейных комбинаций проекторов с коэффициентами из ее центра $Z(\mathcal{M})$. В [10, теорема 4.7] доказано, что каждая бесконечная простая C^* -алгебра $\mathcal{A} = \text{Lin}_{\mathbb{C}}\mathcal{A}^{\text{pr}}$. Если C^* -алгебра $\mathcal{A}$ допускает некоторую (3×3) -матричную декомпозицию, то каждый коммутатор в $\mathcal{A}$ может быть записан в виде линейной комбинации из не более чем восьмидесяти четырех проекторов из $\mathcal{A}$ [11]. В работах [12–16] исследована задача о представлении произвольных элементов алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ без прямого абелева слагаемого в виде конечных сумм произведений проекторов из $\mathcal{M}$. В [17] и [18] аналогичный вопрос рассмотрен в контексте C^* -алгебр со свойством унитарной факторизации.

В настоящей статье предложен метод построения идемпотентов в унитарной алгебре $\mathcal{A}$ с использованием n произвольных идемпотентов $P_1, \dots, P_n$ из этой алгебры. Исследованы свойства полученных идемпотентов $P = P(P_1, \dots, P_n)$ (теорема 2), для $n = 2$ и $n = 3$ получен явный вид получаемых идемпотентов $A(P_1, P_2)$ и $B(P_1, P_2, P_3)$ соответственно (теоремы 3 и 5). Отображения

$$P_2 \mapsto A(P_1, P_2), \quad f(P_2) = A(P_1, P_2) \quad \text{и} \quad P_3 \mapsto B(P_1, P_2, P_3), \quad g(P_3) = B(P_1, P_2, P_3)$$

сохраняют дополнения $^{\perp}$ (следствия 4 и 7) и являются мультипликативными на широких классах идемпотентов (следствия 3 и 6). Для конечного следа φ на унитарной C^* -алгебре $\mathcal{A}$ имеем $\varphi(P(P_1, \dots, P_n)) = \varphi(P_n)$. Для проекторов $P_1, \dots, P_n$ из алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ метод дает новый проектор и позволяет построить некоторые частичные изометрии (следствия 5 и 8). Предложенный метод опирается на следующий хорошо известный факт:

Лемма 1. Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная алгебра. Формула $S_P := 2P - I$ ($P \in \mathcal{A}^{\text{id}}$) устанавливает биекцию между множествами $\mathcal{A}^{\text{id}}$ и $\mathcal{A}^{\text{sym}}$.

От произвольного набора $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ мы перейдем по лемме 1 к ассоциированным симметриям $S_{P_1}, \dots, S_{P_n} \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$, затем построим произведение специального вида из этих симметрий, которое также является симметрией, а потом из новой симметрии по лемме 1 получим искомым идемпотент (см. пп. (i) и (ii) теоремы 2).

1. Обозначения и определения

Для унитарной алгебры $\mathcal{A}$ с единицей I введем следующие обозначения:

- $\mathcal{A}^{\text{id}} = \{A \in \mathcal{A} : A^2 = A\}$ – множество всех идемпотентов из $\mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}^{\text{sym}} = \{A \in \mathcal{A} : A^2 = I\}$ – множество всех симметрий из $\mathcal{A}$.

Если $A \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, то $A^\perp := I - A \in \mathcal{A}^{\text{id}}$.

C^* -алгеброй называется такая комплексная банахова $*$ -алгебра $\mathcal{A}$, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Для C^* -алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\text{sa}}$ и $\mathcal{A}^+$ будем обозначать ее подмножества эрмитовых ($A^* = A$) элементов и положительных элементов соответственно. Любую C^* -алгебру можно реализовать как C^* -подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (Гельфанд–Наймарк; см. [19, теорема 3.4.1]). При $\dim \mathcal{H} < +\infty$ алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ отождествляется с полной матричной алгеброй $M_n(\mathbb{C})$.

Конечным следом на C^* -алгебре $\mathcal{A}$ называется такое отображение $\varphi : \mathcal{A}^+ \rightarrow [0, +\infty)$, что имеют место равенства

$$\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y), \quad \varphi(\lambda X) = \lambda \varphi(X) \quad \text{для всех } X, Y \in \mathcal{A}^+, \lambda > 0$$

(при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{A}$.

Коммутантом множества $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется множество

$$\mathcal{X}' = \{Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XY = YX \text{ для всех } X \in \mathcal{X}\}.$$

Алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, называется $*$ -подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, для которой $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$. Для алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\text{pr}}$ будем обозначать ее решетку проекторов ($A^2 = A = A^*$). Если $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, то их точная нижняя грань определяется равенством $(\bigwedge_{k=1}^n P_k)\mathcal{H} = \bigcap_{k=1}^n P_k\mathcal{H}$, а точная верхняя грань есть $\bigvee_{k=1}^n P_k = (\bigwedge_{k=1}^n P_k^\perp)^\perp$.

Оператор $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется частичной изометрией, если $U^*U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$; при этом $U^*U\mathcal{H}$ является начальным подпространством частичной изометрии U .

2. Основные результаты

Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная алгебра и $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$. Определим новую симметрию в $\mathcal{A}$ по формуле

$$S = S_1 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_1.$$

Сначала рассмотрим один частный случай такого произведения.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная алгебра и $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ такие, что $P_k P_j = 0$ при $k \neq j$, $k, j = 1, \dots, n$. Тогда $P := \sum_{k=1}^n P_k \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ и $S_P = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n S_{P_k}$; все симметрии S_{P_k} , $k = 1, \dots, n$, попарно коммутируют.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n S_{P_k} &= (2P_1 - I)(2P_2 - I) \cdots (2P_n - I) = (-1)^{n-1} (2(P_1 + P_2 + \cdots + P_n) - I) = \\ &= (-1)^{n-1} S_P. \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. В условиях теоремы 1 имеем

$$S_{P_1} S_{P_2} \cdots S_{P_{n-1}} S_{P_n} S_{P_{n-1}} \cdots S_{P_2} S_{P_1} = S_{P_n}. \quad (1)$$

Заметим, что для произвольного набора попарно коммутирующих идемпотентов $P_1, \dots, P_n$ равенство (1) также выполнено. Геометрический смысл перестановочности проекторов P и Q состоит в том, что подпространства $P\mathcal{H} \ominus (P\mathcal{H} \cap Q\mathcal{H})$ и $Q\mathcal{H} \ominus (P\mathcal{H} \cap Q\mathcal{H})$ ортогональны; при этом $PQ = P \wedge Q$.

Из теоремы 1 и из теоремы об определителе произведения матриц вытекает

Следствие 2. Для $\mathcal{A} := \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$ в условиях теоремы 1 получим

$$\det(S_P) = (-1)^{mn-n} \prod_{k=1}^n \det S_{P_k}.$$

Теорема 2. Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная алгебра с единицей I и $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$.

- (i) Имеем $S = S_1 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_1 \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$.
- (ii) Для $P_k := \frac{S_k + I}{2} \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, $k = 1, \dots, n$, имеем $P := P(P_1, \dots, P_n) = \frac{S + I}{2} \in \mathcal{A}^{\text{id}}$.
- (iii) Если φ – конечный след на унитарной C^* -алгебре $\mathcal{A}$, то $\varphi(S) = \varphi(S_n) \in \mathbb{R}$ и $\varphi(P) = \varphi(P_n) \in \mathbb{R}^+$.
- (iv) Если $\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$ с $\dim \mathcal{H} < \infty$, то $\det(S) = \det(S_n)$.

Доказательство. (i), (ii). Поскольку $S_k^2 = I$ для всех $k = 1, \dots, n$, имеем $S^2 = I$ и $S \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$. Тогда $P := \frac{S + I}{2} \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ в силу леммы 1. Очевидно,

$$S_1 = \dots = S_n \iff P_1 = \dots = P_n,$$

при этом $P := P(P_1, \dots, P_1) = P_1$.

(iii). Заметим, что для конечного следа φ на C^* -алгебре $\mathcal{A}$ и произвольного идемпотента $Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ имеем $\varphi(Q) \in \mathbb{R}^+$. Далее,

$$\begin{aligned} \varphi(S) &= \varphi(S_1 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_1) = \varphi(S_2 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_1 S_1) = \\ &= \varphi(S_2 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_2) = \varphi(S_3 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_2 S_2) = \cdots = \varphi(S_n) \end{aligned}$$

в силу равенства $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ для всех $A, B \in \mathcal{A}$ (см. [19, с. 222]). Поэтому

$$\varphi(P) = \varphi\left(\frac{S+I}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi(S) + \frac{1}{2}\varphi(I) = \frac{1}{2}\varphi(S_n) + \frac{1}{2}\varphi(I) = \varphi(P_n) \in \mathbb{R}^+$$

(см. [21, теорема 3.6]) и $\varphi(S) = \varphi(S_n) = 2\varphi(P_n) - \varphi(I) \in \mathbb{R}$.

(iv). Если $\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$ с $\dim \mathcal{H} < \infty$, то $\det(T) \in \{-1, 1\}$ для всех $T \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$ и

$$\begin{aligned} \det(S) &= \det(S_1 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_1) = \det(S_1) \cdots \det(S_{n-1}) \det(S_n) \det(S_{n-1}) \cdots \det(S_1) = \\ &= (\det(S_1))^2 \cdots (\det(S_{n-1}))^2 \det(S_n) = \det(S_n) \end{aligned}$$

в силу теоремы об определителе произведения матриц. $\square$

Теорема 3. Пусть $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Тогда

- (i) $A(P_1, P_2) = P_2 - 2P_2P_1 - 2P_1P_2 + 4P_1P_2P_1 \in \mathcal{A}^{\text{id}}$;
- (ii) $A(P_1^\perp, P_2) = A(P_1, P_2)$;
- (iii) $A(P_1, P_2^\perp) = A(P_1, P_2)^\perp$;
- (iv) $A(P_1^\perp, P_2^\perp) = A(P_1, P_2^\perp) = A(P_1, P_2)^\perp$;
- (v) если $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$, то $A(P_1, P_2) = P_2$;
- (vi) $A(P_1, P_1^\perp) = P_1^\perp$; $A(P_1, P_1) = P_1$;
- (vii) если $P_1P_2P_1 = P_1$, то $A(P_1, P_2) = (2P_1 - P_2)^2$;
- (viii) если $P_1P_2 = P_2P_1 \in \{P_1, P_2\}$, то $A(P_1, P_2) = P_2$;
- (ix) $A(P_1, P_2) = (P_2 - 2P_1P_2)(P_2 - 2P_2P_1)$;
- (x) если φ – конечный след на унитарной C^* -алгебре $\mathcal{A}$, то $\varphi(A(P_1, P_2)) = \varphi(P_2) \in \mathbb{R}^+$.

Доказательство. (i). Непосредственными вычислениями получаем равенство $A(P_1, P_2)^2 = A(P_1, P_2)$. Так как $T := S_{P_1}S_{P_2}S_{P_1}$ лежит в $\mathcal{A}^{\text{sym}}$ и формула $S_P := 2P - I$ задает биекцию между множествами $\mathcal{A}^{\text{id}}$ и $\mathcal{A}^{\text{sym}}$ (см. лемму 1), имеем $T := 2A(P_1, P_2) - I$, и поэтому $A(P_1, P_2) \in \mathcal{A}^{\text{id}}$.

(ii) и (iii). Проверяются вычислениями.

(iv). Вытекает из (ii) и (iii).

(v). Проверяется вычислениями.

(vi). Равенство $A(P_1, P_1^\perp) = P_1^\perp$ есть частный случай (v); равенство $A(P_1, P_1) = P_1$ очевидно.

(vii). Равенство очевидно.

(viii). Проверяется вычислениями.

(ix). Легко видеть, что

$$(P_2 - 2P_1P_2)(P_2 - 2P_2P_1) = P_2 - 2P_2P_1 - 2P_1P_2 + 4P_1P_2P_1 = A(P_1, P_2) \in \mathcal{A}^{\text{id}}.$$

(x). Следует из п. (iii) теоремы 2. $\square$

Следствие 3. Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная алгебра и $P_1 \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Тогда отображение $P_2 \mapsto A(P_1, P_2)$, $f(P_2) = A(P_1, P_2)$, удовлетворяет соотношению $f(P)f(Q) = f(PQ)$ для всех $P, Q \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ с $PQ \in \mathcal{A}^{\text{id}}$, т. е. f является мультипликативным отображением на таких идемпотентах.

Доказательство. Имеем

$$f(P) = P - 2PP_1 - 2P_1P + 4P_1PP_1, \quad f(Q) = Q - 2QP_1 - 2P_1Q + 4P_1QP_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(P)f(Q) &= PQ - 2PQP_1 - 2PP_1Q + 4PP_1QP_1 - 2PP_1Q + 4PP_1QP_1 + \\ &\quad + 4PP_1Q - 8PP_1QP_1 - 2P_1PQ + 4P_1PQP_1 + 4P_1PP_1Q - 8P_1PP_1QP_1 + \\ &\quad + 4P_1PP_1Q - 8P_1PP_1QP_1 - 8P_1PP_1Q + 16P_1PP_1QP_1 = \\ &= PQ - 2PQP_1 - 2P_1PQ + 4P_1PQP_1 = f(PQ), \end{aligned}$$

и утверждение доказано. $\square$

Из пп. (iii) и (x) теоремы 1 вытекает

Следствие 4. Отображение $P_2 \mapsto A(P_1, P_2)$, $f(P_2) = A(P_1, P_2)$, сохраняет дополнения $^\perp$. Если $\mathcal{A}$ – унитарная C^* -алгебра, то f сохраняет и конечные следы.

Теорема 4. Если $\mathcal{A}$ – алгебра фон Неймана, то $A(P_1, P_2) \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ для всех $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, и выполнены соотношения:

- (i) $P_1 \wedge P_2 \leq A(P_1, P_2) \leq P_1 \vee P_2$ для всех $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$;
- (ii) если $P_2 \leq P_1$, то $A(P_1, P_2) = P_2 = P_1 \wedge P_2$ для всех $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$;
- (iii) если $P_1 \leq P_2$, то $A(P_1, P_2) = P_2 = P_1 \vee P_2$ для всех $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$;
- (iv) $|P_2 - 2P_2P_1| \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ для всех $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$.

Доказательство. (i). Легко видеть, что

$$P_1 \wedge P_2 \cdot A(P_1, P_2) = P_1 \wedge P_2, \quad A(P_1, P_2) \cdot P_1 \vee P_2 = A(P_1, P_2).$$

(iv). Имеем

$$|P_2 - 2P_2P_1|^2 = (P_2 - 2P_1P_2)(P_2 - 2P_2P_1) = A(P_1, P_2) \in \mathcal{A}^{\text{pr}},$$

поэтому $|P_2 - 2P_2P_1| = A(P_1, P_2)$. $\square$

Пример 1. Для 2×2 -идемпотентных матриц

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{C})$$

имеем $P_1P_2P_1 = P_1$ и $P_2P_1P_2 = P_2$.

Из следствия 1 к задаче 98 [22] получим

Следствие 5. Если $\mathcal{A}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, то оператор $U := P_2 - 2P_2P_1$ является частичной изометрией с начальным пространством $A(P_1, P_2)\mathcal{H}$. Если еще $P_1P_2P_1 = P_1$, то оператор $V := 2P_1 - P_2$ является самосопряженной частичной изометрией с $V^2 := A(P_1, P_2)$.

Легко проверить, что $UU^* = P_2$, т.е. конечным пространством частичной изометрии U является $P_2\mathcal{H}$.

Теорема 5. Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная алгебра с единицей I и $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Тогда

(i) имеем

$$\begin{aligned} B(P_1, P_2, P_3) = & 16P_1P_2P_3P_2P_1 - 8P_1P_2P_3P_2 - 8P_1P_2P_3P_1 - 8P_1P_3P_2P_1 - \\ & - 8P_2P_3P_2P_1 + 4P_1P_2P_3 + 4P_1P_3P_2 + 4P_1P_3P_1 + 4P_2P_3P_2 + 4P_2P_3P_1 + \\ & + 4P_3P_2P_1 - 2P_1P_3 - 2P_2P_3 - 2P_3P_2 - 2P_3P_1 + P_3 \in \mathcal{A}^{\text{id}}; \end{aligned}$$

$$(ii) \quad B(P_1^\perp, P_2, P_3) = B(P_1, P_2^\perp, P_3) = B(P_1, P_2, P_3); \quad B(P_1^\perp, P_2^\perp, P_3) = B(P_1, P_2, P_3);$$

$$(iii) \quad B(P_1, P_2, P_3^\perp) = B(P_1, P_2, P_3)^\perp;$$

$$(iv) \quad B(P_1^\perp, P_2^\perp, P_3^\perp) = B(P_1, P_2, P_3)^\perp;$$

$$(v) \quad \text{если } P_1P_3 = P_3P_2 = P_2P_3 = P_3P_1 = 0, \text{ то } B(P_1, P_2, P_3) = P_3;$$

$$(vi) \quad B(P_1, P_1, P_1^\perp) = P_1^\perp, \quad B(P_1, P_1, P_1) = P_1;$$

$$(vii) \quad \text{если } P_2P_3P_2 = P_2, P_1P_3P_1 = P_1, \text{ то}$$

$$B(P_1, P_2, P_3) = (2P_1 - I)(2P_2 - I)P_3(2P_2 - I)(2P_1 - I);$$

$$(viii) \quad \text{если } P_1P_3 = P_3P_2 = P_2P_3 = P_3P_1 \in \{P_1, P_2, P_3\}, \text{ то } B(P_1, P_2, P_3) = P_3;$$

$$(ix) \quad B(P_1, P_2, P_3) = (4P_1P_2 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)P_3(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3);$$

$$(x) \quad \text{если } \varphi \text{ – конечный след на унитарной } C^* \text{–алгебре } \mathcal{A}, \text{ то выполняется равенство } \varphi(B(P_1, P_2, P_3)) = \varphi(P_3) \in \mathbb{R}^+.$$

Доказательство. (i). Непосредственными вычислениями проверяется равенство $B(P_1, P_2, P_3)^2 = B(P_1, P_2, P_3)$.

Так как $T := S_{P_1}S_{P_2}S_{P_3}S_{P_2}S_{P_1} \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$ и формула $S_P := 2P - I$ задает биекцию между множествами $\mathcal{A}^{\text{id}}$ и $\mathcal{A}^{\text{sym}}$ (см. лемму 1), имеем $T := 2B(P_1, P_2, P_3) - I$, и поэтому $B(P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{A}^{\text{id}}$.

(ii) и (iii). Проверяются вычислениями.

(iv). Вытекает из (ii) и (iii).

(v). Проверяется вычислениями.

(vi). Равенство $B(P_1, P_1, P_1^\perp) = P_1^\perp$ есть частный случай утверждения (v); равенство $B(P_1, P_1, P_1) = P_1$ очевидно.

(vii). Равенство очевидно.

(viii). Проверяется вычислениями.

(ix). Легко видеть, что

$$(4P_1P_2 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)P_3(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3) = B(P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{A}^{\text{id}}.$$

(x). Следует из п. (iii) теоремы 2.

Теорема доказана. $\square$

Следствие 6. Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная алгебра и $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\text{id}}$. Тогда отображение $P_3 \mapsto B(P_1, P_2, P_3)$, $g(P_3) = B(P_1, P_2, P_3)$, удовлетворяет для всех $R_1, R_2 \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ с $R_1R_2 \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ соотношению $g(R_1)g(R_2) = g(R_1R_2)$, т. е. g является мультипликативным отображением на таких идемпотентах.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} g(R_1) = & 16P_1P_2R_1P_2P_1 - 8P_1P_2R_1P_2 - 8P_1P_2R_1P_1 - 8P_1R_1P_2P_1 - 8P_2R_1P_2P_1 + \\ & + 4P_1P_2R_1 + 4P_1R_1P_2 + 4P_1R_1P_1 + 4P_2R_1P_2 + 4P_2R_1P_1 + 4R_1P_2P_1 - \\ & - 2P_1R_1 - 2P_2R_1 - 2R_1P_2 - 2R_1P_1 + R_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(R_2) = & 16P_1P_2R_2P_2P_1 - 8P_1P_2R_2P_2 - 8P_1P_2R_2P_1 - 8P_1R_2P_2P_1 - 8P_2R_2P_2P_1 + \\ & + 4P_1P_2R_2 + 4P_1R_2P_2 + 4P_1R_2P_1 + 4P_2R_2P_2 + 4P_2R_2P_1 + 4R_2P_2P_1 - \\ & - 2P_1R_2 - 2P_2R_2 - 2R_2P_2 - 2R_2P_1 + R_2. \end{aligned}$$

Тогда следующее соотношение проверяется прямыми вычислениями:

$$\begin{aligned} g(R_1)g(R_2) = & 16P_1P_2R_1R_2P_2P_1 - 8P_1P_2R_1R_2P_2 - 8P_1P_2R_1R_2P_1 - 8P_1R_1R_2P_2P_1 - \\ & - 8P_2R_1R_2P_2P_1 + 4P_1P_2R_1R_2 + 4P_1R_1R_2P_2 + 4P_1R_1R_2P_1 + \\ & + 4P_2R_1R_2P_2 + 4P_2R_1R_2P_1 + 4R_1R_2P_2P_1 - 2P_1R_1R_2 - 2P_2R_1R_2 - \\ & - 2R_1R_2P_2 - 2R_1R_2P_1 + R_1R_2 = g(R_1R_2). \end{aligned}$$

Утверждение доказано. $\square$

Из пп. (iii) и (x) теоремы 3 вытекает

Следствие 7. Отображение $P_3 \mapsto B(P_1, P_2, P_3)$, $g(P_3) = B(P_1, P_2, P_3)$, сохраняет дополнения $^\perp$. Если $\mathcal{A}$ – унитарная C^* -алгебра, то она сохраняет и конечные следы.

Теорема 6. Если $\mathcal{A}$ – алгебра фон Неймана, то $B(P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ для любых $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, и выполнены соотношения:

- (i) $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \leq B(P_1, P_2, P_3) \leq P_1 \vee P_2 \vee P_3$ для всех $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$;
- (ii) $|P_3(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)| \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ для всех $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$.

Доказательство. (i). Легко видеть, что

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdot B(P_1, P_2, P_3) = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3, \quad B(P_1, P_2, P_3) \cdot P_1 \vee P_2 \vee P_3 = B(P_1, P_2, P_3).$$

(ii). Имеем

$$\begin{aligned} & |P_3(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)|^2 = \\ & = (4P_1P_2 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)P_3^2(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3) = \\ & = (4P_1P_2 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)P_3(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3) = \\ & = B(P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{A}^{\text{pr}}, \end{aligned}$$

поэтому $|P_3(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)| = B(P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$. $\square$

Следствие 8. Если $\mathcal{A}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, то оператор $U := P_3(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)$ является частичной изометрией с начальным пространством $B(P_1, P_2, P_3)\mathcal{H}$.

Легко проверить, что $UU^* = P_3$, т. е. конечным пространством частичной изометрии U является $P_3\mathcal{H}$.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Dixmier J. Position relative de deux variétés linéaires fermées dans un espace de Hilbert // Rev. Sci. 1948. V. 86. P. 387–399.
2. Broise M. Commutateurs dans le groupe unitaire d'un facteur // J. Math. Pures Appl. Sér. 9. 1967. V. 46, No 3. P. 299–312.
3. Fillmore P.A. On products of symmetries // Can. J. Math. 1966. V. 18, No 5. P. 897–900. <https://doi.org/10.4153/CJM-1966-090-5>.
4. Stampfli J.G. Sums of projections // Duke Math. J. 1964. V. 31, No 3. P. 455–461. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-64-03144-8>.
5. Fillmore P.A. Sums of operators with square zero // Acta Sci. Math. 1967. V. 28, Nos 3–4. P. 285–288.
6. Percy C., Topping D. Sums of small numbers of idempotents // Mich. Math. J. 1967. V. 14, No 4. P. 453–465. <https://doi.org/10.1307/mmj/1028999848>.
7. Matsumoto K. Self-adjoint operators as a real span of 5 projections // Math. Jpn. 1984. V. 29, No 2. P. 291–294.
8. Holland S.S., Jr. Projections algebraically generate the bounded operators on real or quaternionic Hilbert space // Proc. Am. Math. Soc. 1995. V. 123, No 11. P. 3361–3362. <https://doi.org/10.2307/2161078>.
9. Goldstein S., Paszkiewicz A. Linear combinations of projections in von Neumann algebras // Proc. Am. Math. Soc. 1992. V. 116, No 1. P. 175–183. <https://doi.org/10.2307/2159311>.
10. Marcoux L.W., Murphy G.J. Unitarily-invariant linear spaces in C^* -algebras // Proc. Am. Math. Soc. 1998. V. 126, No 12. P. 3597–3605. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04934-X>.

11. *Marcoux L.W.* On the linear span of the projections in certain simple C^* -algebras // *Indiana Univ. Math. J.* 2002. V. 51, No 3. P. 753–771.
12. *Бикчентаев А.М.* О представлении линейных операторов в гильбертовом пространстве в виде конечных сумм произведений проекторов // *Докл. РАН.* 2003. Т. 393, № 4. С. 444–447.
13. *Бикчентаев А.М.* О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов // *Сиб. матем. журн.* 2005. Т. 46, № 1. С. 32–45.
14. *Bikchentaev A.M.* Representation of elements of von Neumann algebras in the form of finite sums of products of projections. II // *Proc. Int. Conf. Operator Theory 20. Ser.: Theta Series in Advanced Mathematics.* V. 6. Bucharest: Theta Found., 2006. P. 15–23.
15. *Бикчентаев А.М.* О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов. III. Коммутаторы в C^* -алгебрах // *Матем. сб.* 2008. Т. 199, № 4. С. 3–20.
16. *Komisarski A., Paszkiewicz A.* Sums of compositions of pairs of projections // *J. Oper. Theory.* 2015. V. 74, No 2. P. 307–317. <http://dx.doi.org/10.7900/jot.2014jun17.2056>.
17. *Бикчентаев А.М., Шерстнев А.Н.* Проекторно-выпуклые комбинации в C^* -алгебрах со свойством унитарной факторизации // *Матем. заметки.* 2004. Т. 76, № 4. С. 625–628.
18. *Бикчентаев А.М.* Проекторно-выпуклые комбинации в C^* -алгебрах и проблема инвариантного подпространства. I // *Матем. заметки.* 2006. Т. 79, № 2. С. 311–315.
19. *Мёрфи Дж.* C^* -алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997. 336 с.
20. *Шерстнев А.Н.* Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. М.: Физматлит, 2008. 264 с.
21. *Бикчентаев А.М.* К теории τ -измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // *Матем. заметки.* 2015. Т. 98, № 3. С. 337–348.
22. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970. 352 с.

References

1. Dixmier J. Position relative de deux variétés linéaires fermées dans un espace de Hilbert. *Rev. Sci.*, 1948, vol. 86, pp. 387–399. (In French)
2. Broise M. Commutateurs dans le groupe unitaire d'un facteur. *J. Math. Pures Appl. Sér. 9*, 1967, vol. 46, no. 3, pp. 299–312. (In French)
3. Fillmore P.A. On products of symmetries. *Can. J. Math.*, 1966, vol. 18, no. 5, pp. 897–900. <https://doi.org/10.4153/CJM-1966-090-5>.
4. Stampfli J.G. Sums of projections. *Duke Math. J.*, 1964, vol. 31, no. 3, pp. 455–461. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-64-03144-8>.
5. Fillmore P.A. Sums of operators with square zero. *Acta Sci. Math.*, 1967, vol. 28, nos. 3–4, pp. 285–288.
6. Pearcy C., Topping D. Sums of small numbers of idempotents. *Mich. Math. J.*, 1967, vol. 14, no. 4, pp. 453–465. <https://doi.org/10.1307/mmj/1028999848>.

7. Matsumoto K. Self-adjoint operators as a real span of 5 projections. *Math. Jpn.*, 1984, vol. 29, no. 2, pp. 291–294.
8. Holland S.S., Jr. Projections algebraically generate the bounded operators on real or quaternionic Hilbert space. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1995, vol. 123, no. 11, pp. 3361–3362. <https://doi.org/10.2307/2161078>.
9. Goldstein S., Paszkiewicz A. Linear combinations of projections in von Neumann algebras. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1992, vol. 116, no. 1, pp. 175–183. <https://doi.org/10.2307/2159311>.
10. Marcoux L.W., Murphy G.J. Unitarily-invariant linear spaces in C^* -algebras. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1998, vol. 126, no. 12, pp. 3597–3605. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04934-X>.
11. Marcoux L.W. On the linear span of the projections in certain simple C^* -algebras. *Indiana Univ. Math. J.*, 2002, vol. 51, no. 3, pp. 753–771.
12. Bikchentaev A.M. Representation of linear operators in a Hilbert space in the form of finite sums of products of projectors. *Dokl. Math.*, 2003, vol. 68, no. 3, pp. 376–379.
13. Bikchentaev A.M. On representation of elements of a von Neumann algebra in the form of finite sums of products of projections. *Sib. Math. J.*, 2005, vol. 46, no. 1, pp. 24–34. <https://doi.org/10.1007/s11202-005-0003-4>.
14. Bikchentaev A.M. Representation of elements of von Neumann algebras in the form of finite sums of products of projections. II. *Proc. Int. Conf. Operator Theory* 20. Ser.: Theta Series in Advanced Mathematics. Vol. 6. Bucharest, Theta Found., 2006, pp. 15–23.
15. Bikchentaev A.M. On the representation of elements of a von Neumann algebra in the form of finite sums of products of projections. III. Commutators in C^* -algebras. *Sb.: Math.*, 2008, vol. 199, no. 4, pp. 477–493. <https://doi.org/10.1070/SM2008v199n04ABEH003929>.
16. KomisarSKI A., Paszkiewicz A. Sums of compositions of pairs of projections. *J. Oper. Theory*, 2015, vol. 74, no. 2, pp. 307–317. <http://dx.doi.org/10.7900/jot.2014jun17.2056>.
17. Bikchentaev A.M., Sherstnev A.N. Projective convex combinations in C^* -algebras with the unitary factorization property. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 4, pp. 578–581. <https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000043487.24773.04>.
18. Bikchentaev A.M. Projection-convex combinations in C^* -algebras and the invariant subspace problem, I. *Math. Notes*, 2006, vol. 79, no. 2, pp. 285–290. <https://doi.org/10.1007/s11006-006-0032-8>.
19. Murphy G.J. *C^* -algebra i teoriya operatorov* [C^* -Algebras and Operator Theory]. Moscow, Faktorial, 1997. 336 p. (In Russian)
20. Sherstnev A.N. *Metody bilineinykh form v nekommutativnoi teorii mery i integrala* [Methods of Bilinear Forms in Noncommutative Measure and Integral Theory]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 264 p. (In Russian)
21. Bikchentaev A.M. Concerning the theory of τ -measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra. *Math. Notes*, 2015, vol. 98, no. 3, pp. 382–391. <https://doi.org/10.1134/S0001434615090035>.
22. Halmos P.R. *Gil'bertovo prostranstvo v zadachakh* [A Hilbert Space Problem Book]. Moscow, Mir, 1970. 352 p. (In Russian)

Информация об авторах

Махмуд Хадур, аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: *mahmoud.khadour.991@gmail.com*

Author Information

Mahmoud Khadour, Postgraduate Student, Kazan Federal University
E-mail: *mahmoud.khadour.991@gmail.com*

Поступила в редакцию 18.12.2024

Принята к публикации 10.02.2025

Received December 18, 2024

Accepted February 10, 2025