ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ
УДК 532.5: 539.3
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.329-350

Нелинейный гидроупругий отклик стенки узкого канала, заполненного пульсирующей вязкой жидкостью, при продольных колебаниях его противоположной стенки

В.С. Попов[1,2] ✉, А.А. Попова[1], А.В. Черненко[1], М.В. Попова[3]

[1] *Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия*

[2] *Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук, г. Саратов, Россия*

[3] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия*

✉ *vic_p@bk.ru*

Аннотация

Поставлены и решены задачи гидроупругости для математического моделирования нелинейного отклика стенки узкого канала, заполненного пульсирующей вязкой жидкостью. Исследован плоский канал с параллельными жесткими стенками для случая продольных колебаний нижней стенки, имеющей нелинейно-упругое закрепление на торцах, за счет ее взаимодействия через слой жидкости в канале с противоположной вибрирующей стенкой. Динамика жидкости в канале изучена в пределах пульсирующего течения Куэтта с учетом инерции ее движения. Движение нижней стенки канала рассмотрено в рамках модели «масса на пружине», имеющей симметричную характеристику жесткости с кубической нелинейностью. Учет диссипативных свойств вязкой жидкости позволяет пренебречь влиянием начальных условий и перейти к рассмотрению краевой задачи математической физики для исследования установившихся вынужденных колебаний стенки канала. Асимптотический анализ данной задачи методом возмущений позволил свести ее к рассмотрению нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, обобщающего уравнение Дуффинга. Его решение проведено методом Крылова – Боголюбова, что позволило определить нелинейный гидроупругий отклик стенки на основном резонансе в виде ее амплитудной и фазовой частотных характеристик. Указанные характеристики имеют вид неявных функций, что требует их численного исследования. Приведен пример такого исследования, который показал существенное влияние учета инерции движения жидкости и вариации толщины слоя жидкости в канале на амплитуду колебаний, резонансные частоты, а также частотный диапазон неустойчивых колебаний со скачкообразным изменением амплитуд.

Ключевые слова: нелинейные гидроупругие колебания, жесткая стенка, вязкая жидкость, пульсирующее течение Куэтта, нелинейно-упругое закрепление, жесткая кубическая нелинейность, метод возмущений, метод Крылова – Боголюбова, гидроупругий отклик, математическое моделирование

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание по теме 125020501400-6).

Для цитирования: *Попов В.С., Попова А.А., Черненко А.В., Попова М.В.* Нелинейный гидроупругий отклик стенки узкого канала, заполненного пульсирующей вязкой жидкостью, при продольных колебаниях его противоположной стенки // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 329–350. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.329-350.

ORIGINAL ARTICLE
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.329-350

Nonlinear hydroelastic response of the wall of a narrow channel filled with pulsating viscous liquid due to longitudinal vibrations of its opposite wall

V.S. Popov[1,2] ✉, **A.A. Popova**[1], **A.V. Chernenko**[1], **M.V. Popova**[3]

[1] *Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia*

[2] *Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, Saratov, Russia*

[3] *Saratov State University, Saratov, Russia*

✉ *vic_p@bk.ru*

Abstract

The problems of hydroelasticity that arise during the mathematical modeling of the nonlinear response of the wall of a narrow channel filled with pulsating viscous liquid were formulated and solved. The plane channel has parallel rigid walls, where the bottom wall with nonlinear elastic supports at the ends undergoes longitudinal vibrations due to its interaction with the opposite vibrating wall through the liquid layer. The liquid dynamics in the channel were analyzed as a pulsating Couette flow with the consideration of the liquid inertia. The movement of the bottom wall of the channel was described using the mass-on-spring model characterized by symmetric stiffness with cubic nonlinearity. With the dissipative properties of the viscous liquid taken into account, the influence of the initial conditions became negligible, making it possible to focus on the formulation of a boundary value problem of mathematical physics for steady-state forced vibrations of the channel wall. Following the asymptotic analysis by the perturbation method, the problem was reduced to a nonlinear ordinary differential equation that generalizes the Duffing equation. The equation was solved by the Krylov–Bogolyubov method, and the nonlinear hydroelastic response of the wall to the primary resonance was determined in the form of its amplitude- and phase-frequency characteristics. The nonlinear hydroelastic response characteristics were expressed as implicit functions and require further numerical investigation. An example of such an investigation was provided, demonstrating that taking into account the liquid inertia and varying thickness of the liquid layer in the channel significantly affects the amplitude of vibrations, resonant frequencies, as well as the range of unstable vibrations with sudden amplitude changes.

Keywords: nonlinear hydroelastic vibrations, rigid wall, viscous liquid, pulsating Couette flow, nonlinear elastic support, hardening cubic nonlinearity, perturbation method, Krylov–Bogolyubov method, hydroelastic response, mathematical modeling

Acknowledgments. This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as part of the state assignment (theme no. 125020501400-6).

For citation: Popov A.A., Popova A.A., Chernenko A.V., Popova M.V. Nonlinear hydroelastic response of the wall of a narrow channel filled with pulsating viscous liquid due to longitudinal vibrations of its opposite wall. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 329–350. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.329-350. (In Russian)

Введение

Моделирование и расчет поведения различных конструкций связаны с рассмотрением статических и динамических проблем механики. Одно из современных ее направлений составляют задачи гидроаэроупругости, в рамках которых изучается взаимодействие твердых тел с упругим закреплением или упруго деформируемых тел с жидкостью или газом [1–3]. Ограничимся ниже кратким указанием работ, наиболее близких к тематике нашего исследования и посвященных колебаниям упругих балок и пластин, а также твердых тел, взаимодействующих с жидкостью.

В работах [4,5] в линейной постановке решены задачи о свободных колебаниях упругой круглой пластины, являющейся частью жесткой границы раздела, над которой находится безграничный объем неподвижной идеальной жидкости. Основной подход указанных работ – использование разделения переменных и задание пространственной формы колебаний пластины, соответствующей случаю ее колебаний в вакууме. В исторически первой работе [4] использован энергетический метод Рэлея для низшего тона колебаний жестко защемленной пластины, а в [5] решена связанная задача гидроупругости с учетом обертонов пластины для жесткого, шарнирного и сводного опираний ее на контуре. В [6] подход из [4] дополнен рассмотрением вязкости жидкости путем введения безразмерного параметра, который по факту является обратным значением известного параметра подобия – числа Уомерсли [7], используемого при изучении напорных пульсирующих движений вязкой жидкости. В [8] в рамках подхода, аналогичного [5], рассмотрена плоская задача собственных колебаний консольно закрепленной балки Бернулли – Эйлера, окруженной неограниченным объемом вязкой жидкости, и представлены сравнения полученного решения с экспериментом. Задача динамики жидкости решена в упрощенной постановке за счет задания экспоненциально убывающего профиля скорости в направлении изгиба балки.

Как пример исследования статической проблемы гидроупругости следует отметить работу [9], посвященную определению площади контакта элемента системы жидкостного охлаждения в виде упругой оболочки плоскоовального сечения с двумя параллельными жесткими пластинами, между которыми он заключен с начальным зазором, за счет изменения гидростатического давления внутри элемента. Моделирование выполнено в предположении плоской деформации при рассмотрении контура поперечного сечения оболочки как балки-полоски Бернулли – Эйлера. Выполнено сравнение аналитического решения с поставленным экспериментом, которое показало правомочность предложенного подхода.

В [10, 11] на базе конечно-элементного алгоритма численно исследованы гидроупругая устойчивость и собственные колебания пластинки, образующей верхнюю стенку канала прямоугольного сечения, взаимодействующей с потоком идеальной жидкости. Исследование [11] нацелено на изучение пассивного демпфирования колебаний посредством замыкания внешней электрической цепью из резистора и катушки индуктивности пьезоэлемента, закрепленного на внешней поверхности пластины. Отметим также пристатейные списки названных работ, содержащие актуальные источники с информацией по численному исследованию проблем гидроупругости пластин, в том числе смарт-конструкций с пьезоэлементами, для реализации активных и пассивных способов управления их колебаниями.

Среди работ о взаимодействии вибрирующих жестких тел с жидкостью выделим [12–14], посвященные исследованию волновых процессов в идеальной и вязкой жидкости. Возможность подавления амплитуд волн в безнапорном мелководном канале вблизи вибрирующего на дне жесткого штампа установлена в [12], для аналогичного канала в [13] исследовано взаимодействие нелинейных уединенных волн или группы волн с упруго закрепленной жесткой стенкой. Возбуждение и эволюция нелинейных вязких волн при продольных колебаниях жесткой пластины в вязкой жидкости аналитически исследованы в [14].

Укажем на экспериментальные исследования взаимодействия жесткого тела и окружающей его вязкой жидкости, помещенных в замкнутую полость, при продольных или вращательных колебаниях этой полости [15, 16]. В данных работах обнаружен эффект вибрационной подъемной силы, возникающей в вязкой жидкости вблизи стенки вибрирующей полости.

Математическое моделирование движения вязкой жидкости за счет продольных вибраций жестких или жестких пористых стенок выполнено в [17, 18]. В [19] проведено моделирование движения вязкой жидкости при вращательных колебаниях пористой жесткой сферы, помещенной в нее, а в [20, 21] аналитически исследовано движение вязкой жидкости между криволинейными стенками, одна из которых пористая, при их радиальных и окружных колебаниях.

Отметим также работы [22–24], в которых рассмотрены задачи колебаний твердых тел на линейно-упругом подвесе, взаимодействующих с вязким газом. В [22] в плоской постановке исследовано взаимодействие смазочного слоя газа и стенки газодинамического подшипника. Упругая податливость стенки за счет давления учитывается в виде дополнительного изменения толщины слоя газа по линейному закону с коэффициентом пропорциональности, определяемым модулем упругости материала стенки. Численное моделирование взаимодействия вязкого газа, с учетом термодинамических процессов в нем, и затвора клапана при его открытии проведено в [23, 24]. Движение затвора клапана смоделировано в рамках модели «масса на пружине», а для численного решения уравнений движения газа использован модифицированный метод Годунова. В работах [25, 26] представлено аналитическое решение задач о поперечных колебаниях жесткой стенки узкого канала в виде круглой [25] или прямоугольной [26] пластины на упругом подвесе с кубической нелинейностью, взаимодействующей с пульсирующим слоем газа в канале. Рассмотрены плоская [25] и осесимметричная [26] задачи при использовании для газа модели вязкой баротропной среды в изотермическом состоянии.

В [27, 28] изучены продольные колебания стенок, имеющих линейно-упругое закрепление на торцах и взаимодействующих с вязкой жидкостью. Случай возбуждения продольных колебаний пластины, закрепленной по торцам на пружинах, совершающей поперечные колебания и помещенной в поток вязкой жидкости, ограниченный жесткими стенками, рассмотрен в [27]. В работе [28] аналитически решена задача о продольных колебаниях жесткой стенки клиновидного канала, имеющей линейно-упругое закрепление на торцах. Постановка и решение задачи гидроупругих колебаний торцевой стенки узкого плоского канала в случае учета кубической нелинейности ее упругого закрепления и взаимодействия с вязкой пульсирующей жидкостью, заполняющей канал, осуществлены в [29].

Проведенный анализ опубликованных исследований показывает, что за рамками рассмотрения остались вопросы постановки и решения задачи о продольных колебаниях стенки узкого канала, имеющей нелинейно-упругое закрепление на торцах, возбуждаемых вибрацией противоположной стенки через пульсирующий слой вязкой жидкости, находящейся между ними.

1. Постановка проблемы, основные положения и допущения

Рассмотрим механическую колебательную систему, состоящую из двух параллельных друг другу жестких стенок, между которыми находится жидкость (см. рис. 1). Стенки рассматриваемого канала представляют собой прямоугольные пластины со сторонами $2l$ и b. Полагая, что размер $b \gg 2l$, перейдем к рассмотрению плоской задачи. Расстояние между пластинами $\delta \ll l$. Законы изменения давления в сечениях канала на его торцах считаем известными, на левом торце – это p_{-l}, а на правом – p_{+l}. Верхняя стенка совершает продольные колебания по заданному закону. Нижняя (ведомая) стенка на торцах имеет нелинейно-упругое закрепление, позволяющее совершать ей только продольные перемещения за счет взаимодействия с жидкостью в канале. Для определенности считаем, что торцевое закрепление нижней стенки имеет симметричную характеристику жесткости с кубической нелинейностью, а амплитуды колебаний стенок канала существенно меньше его длины $2l$. Жидкость, заполняющую канал, рассмотрим в рамках модели ньютоновской вязкой жидкости. Изменение температуры стенок канала и жидкости считаем незначительным по сравнению с быстро меняющимся колебательным процессом, т. е. положим ее постоянной в пределах достаточно большого цикла колебаний. Плотность жидкости примем постоянной, исходя из того, что скорость ее движения, как и скорость движения стенок канала, значительно меньше скорости звука в изотермическом состоянии, т. е. характерное число Маха значительно меньше единицы. В связи с рассмотрением изотермического состояния примем коэффициент кинематической вязкости жидкости постоянным, учитывая, что этот коэффициент можно считать не зависящим от давления [30, 31]. Действием силы тяжести ввиду узости канала пренебрегаем. Введем декартову систему координат Oxz, начало которой расположим в центре внутренней поверхности нижней стенки канала в невозмущенном состоянии. Учет вязкости жидкости позволяет сосредоточиться на изучении установившихся вынужденных нелинейных колебаний нижней стенки канала, так как ее свободные колебания в течение короткого времени затухают [32].

Закон движения верхней стенки считаем гармоническим:

$$x_2 = x_{2m} f_2(\omega t), \quad f_2(\omega t) = \sin(\omega t + \varphi_2), \tag{1}$$

здесь z_{2m} – амплитуда колебаний верхней стенки, ω – частота, φ_2 – начальная фаза, t – время.

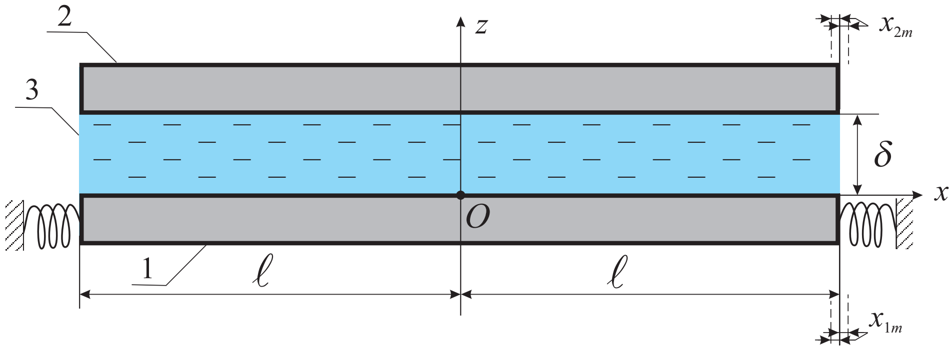

Рис. 1. Схематичный вид колебательной системы в виде узкого плоского канала: 1 – верхняя (ведущая) стенка канала, совершающая продольные гармонические колебания; 2 – нижняя (ведомая) стенка канала, имеющая нелинейно-упругое закрепление на торцах; 3 – вязкая жидкость
Fig. 1. Schematic view of the vibration system in the form of a narrow plane channel: 1 – upper (driving) wall of the channel performing longitudinal harmonic vibrations; 2 – lower (driven) wall of the channel with nonlinear elastic supports at the ends; 3 – viscous liquid

Уравнение движения нижней стенки в рамках модели «масса на нелинейно-упругой пружине» в подходе Лагранжа представим в виде

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + F(x_1) = N_f, \tag{2}$$

где $F(x_1)$ – восстанавливающая сила нелинейно-упругого закрепления; N_f – возмущающая сила, обусловленная вибрацией верхней стенки канала и пульсацией давления на его торцах; m_1 – масса нижней стенки.

Закон движения нижней стенки представим в виде $x_1 = x_{1m} f_1(\omega_* t)$, где x_{1m} – амплитуда нелинейных колебаний нижней стенки, $f_1(\omega_* t)$ – функция времени, ω_* – характерная частота нелинейных колебаний нижней стенки.

Восстанавливающая сила нелинейно-упругого закрепления на торцах имеет линейную и нелинейную составляющие. Первая пропорциональна смещению нижней стенки, а вторая пропорциональна кубу смещения нижней стенки [33, 34], т. е.

$$F(x_1) = n_1 x_1 + n_3 x_1^3. \tag{3}$$

Здесь n_1 – коэффициент жесткости линейной составляющей, n_3 – коэффициент жесткости нелинейной составляющей. Далее рассматриваем случай жесткой нелинейности, т. е. полагаем $n_3 > 0$.

Возмущающая сила N_f определяется напряжением сдвига вязкой жидкости $q_{zx} = \rho\nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)$ [30, 31], действующим на поверхности контакта нижней стенки с жидкостью. С учетом того, что представленное соотношение для напряжения соответствует описанию движения жидкости в подходе Эйлера [30], выражение для возмущающей силы запишем в виде

$$N_f = \int_0^b \int_{-l}^{l} \left(q_{zx} + x_1 \frac{\partial q_{zx}}{\partial x} \right)\Bigg|_{z=0} dxdy = b\rho\nu \int_{-l}^{l} \left(1 + x_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\Bigg|_{z=0} dx. \tag{4}$$

Для определения напряжения сдвига вязкой жидкости необходимо совместно с (2)–(4) рассмотреть уравнения движения жидкости, т. е. уравнения Навье – Стокса, замыкаемые уравнением неразрывности для среды постоянной плотности. Для плоской задачи в подходе Эйлера эти уравнения во введенной системе координат можно записать следующим образом [30, 31]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right),\\
\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right),\\
\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Здесь p – давление жидкости, V_z – проекция скорости жидкости на ось Oz, V_x – проекция скорости жидкости на ось Ox, ρ и ν – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости соответственно.

Граничные условия уравнений (5) – это условия отсутствия скольжения вязкой жидкости на поверхности ее контакта с вибрирующими стенками канала. Эти условия представляют собой совпадение скоростей жидкости и стенок канала на границах их контакта:

$$
\begin{gathered}
V_x + x_{1m} f_1(\omega_* t)\frac{\partial V_x}{\partial x} = x_{1m}\frac{df_1(\omega_* t)}{dt}, \quad V_z = 0 \ \text{ при } \ z = 0,\\
V_x + x_{2m} f_2(\omega t)\frac{\partial V_x}{\partial x} = x_{2m}\frac{df_2(\omega t)}{dt}, \quad V_z = 0 \ \text{ при } \ z = \delta.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

При записи (6) учтено, что движение жидкости рассматривается в подходе Эйлера, а движение стенок канала – в подходе Лагранжа [30, 31].

Кроме того, необходимы граничные условия для давления в торцевых сечениях канала. Сформулируем их в предположении, что на торцах канал примыкает к достаточно большим торцевым полостям, заполненным той же жидкостью, давление в которых задано, т. е. пульсирует по известному закону. В этом случае давление в торцевом сечении канала совпадает с заданным давлением в соответствующей торцевой полости, т. е.

$$
p = p_{-l}(\omega t) \text{ при } x = -l, \quad p = p_{+l}(\omega t) \text{ при } x = l. \tag{7}
$$

Изучение режима установившихся вынужденных нелинейных колебаний в рассматриваемой колебательной системе позволяет исключить из рассмотрения начальные условия, так как их влияние за счет вязкости жидкости быстро перестает сказываться. Таким образом, сформулирована краевая задача гидроупругости (1)–(7) для исследования нелинейных продольных колебаний нижней (ведомой) стенки рассматриваемого канала.

2. Асимптотический анализ сформулированной задачи, уравнение продольных нелинейных гидроупругих колебаний стенки канала

В рассматриваемой постановке имеют место следующие соотношения:

$$
\frac{x_{2m}}{x_{1m}} \sim 1, \quad \frac{x_{2m}}{l} \ll 1, \quad \frac{\delta}{l} \ll 1.
$$

Учитывая их, введем в рассмотрение два независимых малых параметра $\psi = \delta/l \ll 1$, $\lambda = x_{1m}/l \ll 1$ и следующие безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{\delta}, \quad \tau = \omega_* t, \quad V_x = x_{1m}\omega_* U_\xi, \quad V_z = \psi x_{1m}\omega_* U_\zeta,$$
$$p = \frac{\rho\nu x_{1m}\omega_*}{\delta\psi}P, \quad p_{-l} = \frac{\rho\nu x_{1m}\omega_*}{\delta\psi}P_{-l}, \quad p_{+l} = \frac{\rho\nu x_{1m}\omega_*}{\delta\psi}P_{+l}. \tag{8}$$

В переменных (8) уравнения динамики жидкости (5), их краевые условия (6), (7) и выражение для возмущающей силы (4) примут вид

$$\mathrm{Wo}^2\left[\frac{\partial U_\xi}{\partial\tau} + \lambda\left(U_\xi\frac{\partial U_\xi}{\partial\xi} + U_\zeta\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\right)\right] = -\frac{\partial P}{\partial\xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial\zeta^2} + \psi^2\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial\xi^2},$$
$$\psi^2\mathrm{Wo}^2\left[\frac{\partial U_\zeta}{\partial\tau} + \lambda\left(U_\xi\frac{\partial U_\zeta}{\partial\xi} + U_\zeta\frac{\partial U_\zeta}{\partial\zeta}\right)\right] = -\frac{\partial P}{\partial\zeta} + \psi^2\left(\psi^2\frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial\zeta^2}\right), \tag{9}$$
$$\frac{\partial U_\xi}{\partial\xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial\zeta} = 0,$$

$$U_\xi + \lambda f_1(\tau)\frac{\partial U_\xi}{\partial\xi} = \frac{df_1(\tau)}{d\tau}, \quad U_\zeta = 0 \ \text{ при } \zeta = 0,$$
$$U_\xi + \lambda\frac{x_{2m}}{x_{1m}}f_2(\omega\tau/\omega_*)\frac{\partial U_\xi}{\partial\xi} = \frac{x_{2m}}{x_{1m}}\frac{df_2(\omega\tau/\omega_*)}{d\tau}, \quad U_\zeta = 0 \ \text{ при } \ \zeta = 1, \tag{10}$$

$$P = P_{-l}(\omega\tau/\omega_*) \ \text{ при } \ \xi = -1, \quad P = P_{+l}(\omega\tau/\omega_*) \ \text{ при } \ \xi = 1, \tag{11}$$

$$N_f = bl\frac{\rho\nu x_{1m}\omega_*}{\delta}\int_{-1}^{1}\left(1 + \lambda f_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left[\psi^2\frac{\partial U_\zeta}{\partial\xi} + \frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\right]\bigg|_{\zeta=0} d\xi. \tag{12}$$

Здесь выделен параметр подобия рассматриваемой задачи $\mathrm{Wo}^2 = \delta^2\omega_*/\nu$ – квадрат числа Уомерсли [7, 34].

Пренебрегая в (9), (12) членами при введенном в рассмотрение малом параметре ψ^2, перейдем аналогично гидродинамической теории смазки [31] к уравнениям тонкого слоя вязкой жидкости, но с удержанием локальных и конвективных членов инерции:

$$\mathrm{Wo}^2\left[\frac{\partial U_\xi}{\partial\tau} + \lambda\left(U_\xi\frac{\partial U_\xi}{\partial\xi} + U_\zeta\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\right)\right] = -\frac{\partial P}{\partial\xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial\zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial\zeta} = 0,$$
$$\frac{\partial U_\xi}{\partial\xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial\zeta} = 0, \tag{13}$$

а также получим следующее выражение для возмущающей силы:

$$N_f = bl\frac{\rho\nu x_{1m}\omega_*}{\delta}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta} + \lambda f_1(\tau)\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial\xi\partial\zeta}\right)\bigg|_{\zeta=0} d\xi. \tag{14}$$

Проведем асимптотический анализ задачи (13) с граничными условиями (10), (11) методом возмущений [35, 36]. Для этого рассмотрим следующие разложения искомых функций по малому параметру λ:

$$U_\xi = U_\xi^{(0)} + \lambda U_\xi^{(1)} + \ldots, \quad U_\zeta = U_\zeta^{(0)} + \lambda U_\zeta^{(1)} + \ldots, \quad P = P^{(0)} + \lambda P^{(1)} + \ldots. \tag{15}$$

Подставив (15) в (13), (14) с краевыми условиями (10), (11) и приняв во внимание, что при движении вязкой жидкости в тонкой щели имеют место регулярные возмущения [35], ограничимся первым членом разложений (15) для линеаризации уравнений гидродинамики. В результате получим следующую задачу (верхний индекс (0) в приведенных ниже уравнениях опущен):

– линеаризованные уравнения движения тонкого слоя вязкой жидкости в канале

$$\mathrm{Wo}^2\frac{\partial U_\xi}{\partial\tau}=-\frac{\partial P}{\partial\xi}+\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial\zeta^2},\quad \frac{\partial P}{\partial\zeta}=0,\quad \frac{\partial U_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial U_\zeta}{\partial\zeta}=0, \tag{16}$$

– уравнение продольного движения нижней стенки канала

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+F(x_1)=bl\frac{\rho\nu x_{1m}\omega_*}{\delta}\int_{-1}^{1}\left.\frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0}d\xi. \tag{17}$$

Граничные условия уравнений (16) – это условия для давления (11) и линеаризованные условия на границах контакта жидкости и стенок канала, которые имеют вид

$$U_\xi=\frac{df_1(\tau)}{d\tau},\;\; U_\zeta=0\;\;\text{при}\;\zeta=0,\quad U_\xi=\frac{x_{2m}}{x_{1m}}\frac{df_2(\omega\tau/\omega_*)}{d\tau},\;\; U_\zeta=0\;\;\text{при}\;\;\zeta=1. \tag{18}$$

Построим решение линеаризованных уравнений динамики тонкого слоя вязкой жидкости (16) с граничными условиями (10), (11) методом итерации [37,38]. На первой итерации положим в первом уравнении (16) $\mathrm{Wo}^2\to 0$, т. е. исключим из рассмотрения инерцию движения жидкости, что с физической точки зрения эквивалентно рассмотрению ползущего движения вязкой жидкости в узкой щели. В результате на первой итерации получим следующее решение:

$$\begin{gathered}U_\xi=\frac{\zeta^2-\zeta}{2}\frac{\partial P}{\partial\xi}+(1-\zeta)\frac{df_1(\tau)}{d\tau}+\zeta\frac{x_{2m}}{x_{1m}}\frac{df_2(\omega\tau/\omega_*)}{d\tau},\quad U_\zeta=0,\\ P=\frac{1}{2}\Big[\xi\big(P_{+l}(\omega\tau/\omega_*)-P_{-l}(\omega\tau/\omega_*)\big)+\big(P_{+l}(\omega\tau/\omega_*)+P_{-l}(\omega\tau/\omega_*)\big)\Big].\end{gathered} \tag{19}$$

На второй итерации проведем уточнение полученного решения (19) учетом влияния инерции движения вязкой жидкости, положив $\mathrm{Wo}^2<1$. Для этого используем найденную компоненту скорости U_ξ по (19) и подставим ее в член первого уравнения (16) при удерживаемом параметре подобия Wo^2, а затем решим полученные уравнения с граничными условиями (10), (11). В результате найдем выражение для уточненной компоненты скорости U_ξ, а также ее частную производную по координате ζ, определяющую возмущающую силу (правую часть (17)) в следующем виде:

$$\begin{aligned}U_\xi=&\frac{\big(P_{+l}(\omega\tau/\omega_*)-P_{-l}(\omega\tau/\omega_*)\big)}{4}(\zeta^2-\zeta)+\frac{df_1(\tau)}{d\tau}(1-\zeta)+\frac{x_{2m}}{x_{1m}}\frac{df_2(\omega\tau/\omega_*)}{d\tau}\zeta+\\&+\frac{\mathrm{Wo}^2}{48}\left(\frac{dP_{+l}(\omega\tau/\omega_*)}{d\tau}-\frac{dP_{-l}(\omega\tau/\omega_*)}{d\tau}\right)(\zeta^4-2\zeta^3+\zeta)+\\&+\frac{\mathrm{Wo}^2}{6}\left(\frac{x_{2m}}{x_{1m}}\frac{d^2f_2(\omega\tau/\omega_*)}{d\tau^2}(\zeta^3-\zeta)+\frac{d^2f_1(\tau)}{d\tau^2}(3\zeta^2-\zeta^3-2\zeta)\right),\end{aligned} \tag{20}$$

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta}\bigg|_{\zeta=0} = \left(\frac{x_{2m}}{x_{1m}}\frac{df_2(\omega\tau/\omega_*)}{d\tau} - \frac{df_1(\tau)}{d\tau}\right) - \frac{\big(P_{+l}(\omega\tau/\omega_*) - P_{-l}(\omega\tau/\omega_*)\big)}{4} +$$
$$+\frac{\mathrm{Wo}^2}{48}\left(\frac{dP_{+l}(\omega\tau/\omega_*)}{d\tau} - \frac{dP_{-l}(\omega\tau/\omega_*)}{d\tau}\right) - \frac{\mathrm{Wo}^2}{6}\left(\frac{x_{2m}}{x_{1m}}\frac{d^2 f_2(\omega\tau/\omega_*)}{d\tau^2} + 2\frac{d^2 f_1(\tau)}{d\tau^2}\right).$$

Подставляя (20) в правую часть (17) получили уравнение продольных нелинейных гидроупругих колебаний стенки в следующем виде:

$$\begin{gathered}(m_1+2M)\frac{d^2x_1}{dt^2} + K\frac{dx_1}{dt} + n_1x_1 + n_3x_1^3 = K\frac{dx_2}{dt} - M\frac{d^2x_2}{dt^2} - \\ -\frac{b\delta}{2}\big(p_{+l}(\omega t) - p_{-l}(\omega t)\big) + \frac{b\delta}{2}T\left(\frac{dp_{+l}(\omega t)}{d\tau} - \frac{dp_{-l}(\omega t)}{d\tau}\right).\end{gathered} \tag{21}$$

Здесь $M = \frac{1}{3}bl\delta\rho$, $K = 2lb\rho\frac{\nu}{\delta}$, $T = \frac{1}{12}\frac{\delta^2}{\nu}$.

3. Определение гидроупругого отклика нижней стенки канала

Уравнение (21) представляет собой обобщенное уравнение Дуффинга, которое допускает периодическое решение [39]. Проведем исследование данного уравнения для случая, когда законы пульсации давления на левом и правом торцах одинаковы, т. е. $p_{-l} = p_{+l}$. В этом случае в канале имеет место пульсирующее течение Куэтта, а уравнение (21) с учетом (1) принимает вид

$$(m_1+2M)\frac{d^2x_1}{dt^2} + K\frac{dx_1}{dt} + n_1x_1 + n_3x_1^3 = x_{2m}\omega E\sin(\omega t + \varphi_2 + \varphi), \tag{22}$$

где $\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{K}{M\omega}$, $E = \sqrt{K^2 + M^2\omega^2}$, для определенности положим далее $\varphi_2 = 0$.

Множитель $x_{2m}\omega$ в (22) представляет собой амплитуду виброскорости верхней стенки канала. Зададим ее исходя из скорости 1 м/с, т. е. $x_{2m}\omega = k \cdot 1$ м/с, здесь k – коэффициент виброперегрузки по скорости. С учетом сделанного замечания проведем решение (22) методом Крылова – Боголюбова [33]. Для этого представим (22) в следующем виде:

$$(m_1+2M)\frac{d^2x_1}{dt^2} + n_1x_1 = \varepsilon f\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}\right) + \varepsilon E_1\sin(\omega t + \varphi), \tag{23}$$

приняв $\varepsilon f\big(x_1, \frac{dx_1}{dt}\big) = \varepsilon f(x_1) + \varepsilon f\big(\frac{dx_1}{dt}\big) = -n_3x_1^3 - K\frac{dx_1}{dt}$, $kE = \varepsilon E_1$ и введя ε – условный малый параметр, отражающий слабую нелинейность и демпфирование в рассматриваемой колебательной системе, а также малую амплитуду возмущающей силы. Ограничимся отысканием решения на главном резонансе, когда $\sqrt{\frac{n_1}{m_1+2M}} = \omega_0 \approx \omega$. В этом случае вид искомого решения (23) представляется как [33]

$$x_1 = x_{1m}\cos(\Psi) = x_{1m}\cos(\omega t + \varphi + \phi). \tag{24}$$

Здесь Ψ – полная фаза, ϕ – сдвиг между фазами свободных колебаний стенки и вынуждающей силы. Выражения для x_{1m} и ϕ определим из уравнений [33]

$$\begin{gathered}\frac{dx_{1m}}{dt} = \varepsilon A_1(x_1,\phi) + \ldots, \\ \frac{d\phi}{dt} = \omega_0 - \omega + \varepsilon\Phi_1(x_1,\phi) + \ldots,\end{gathered} \tag{25}$$

где $A_1(x_1,\phi)$, $\Phi_1(x_1,\phi)$ – это функции, определяемые как

$$\begin{aligned}
&A_1(x_1,\phi) = -\frac{1}{(m_1+2M)2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{dx_1}{dt}\right)\Big|_{x_1=x_{1m}\cos(\Psi)}\sin(\Psi)d\Psi - \\
&-\frac{E_1\cos(\phi)}{(m_1+2M)(\omega_0+\omega)} = -\frac{Kx_{1m}}{2\varepsilon(m_1+2M)} - \frac{E_1\cos(\phi)}{(m_1+2M)(\omega_0+\omega)}, \\
&\Phi_1(x_1,\phi) = -\frac{1}{(m_1+2M)2\pi x_{1m}\omega_0}\int_0^{2\pi} f(x_1)\Big|_{x_1=x_{1m}\cos(\Psi)}\cos(\Psi)d\Psi + \\
&+\frac{E_1\sin(\phi)}{(m_1+2M)x_{1m}(\omega_0+\omega)} = \frac{3n_3x_{1m}^2}{8\varepsilon(m_1+2M)\omega_0} + \frac{E_1\sin(\phi)}{(m_1+2M)x_{1m}(\omega_0+\omega)}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Таким образом, в случае установившихся нелинейных колебаний из (25) с учетом (26) получим с точностью до ε^2 следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
Kx_{1m}\omega = -kE\sin\phi, \\
(m_1+2M)x_{1m}\left[\left(\omega_0 + \frac{3x_{1m}^2}{8\omega_0}\frac{n_3}{m_1+2M}\right)^2 - \omega^2\right] = -kE\cos\phi.
\end{gathered} \tag{27}$$

Из этой системы найдем выражения для амплитудной и фазовой характеристик нижней стенки канала, совершающей установившиеся нелинейные колебания,

$$x_{1m} = \frac{kK}{m_1+2M}\frac{\sqrt{1+M^2\omega^2/K^2}}{\sqrt{\left[\left(\omega_0+\frac{3x_{1m}^2}{8\omega_0}\frac{n_3}{m_1+2M}\right)^2-\omega^2\right]^2+\frac{K^2\omega^2}{(m_1+2M)^2}}}, \tag{28}$$

$$\mathrm{tg}\ \phi = \frac{K}{m_1+2M}\frac{\omega}{\left(\omega_0+\frac{3x_{1m}^2}{8\omega_0}\frac{n_3}{m_1+2M}\right)^2-\omega^2}. \tag{29}$$

Заметим, что в (28), (29) можно выделить частоту $\omega_* = \omega_0 + \frac{3x_{1m}^2}{8\omega_0}\frac{n_3}{m_1+2M}$, которая представляет собой частоту колебаний консервативной нелинейной системы с жесткой нелинейностью (характерная частота нелинейных колебаний нижней стенки). Данная частота определяет скелетную характеристику, задающую изменение собственных частот консервативной нелинейной колебательной системы с жесткой нелинейностью $\omega_*^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\frac{x_{1m}^2 n_3}{m_1+2M}$.

Вводя в рассмотрение безразмерную частоту $\eta^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \omega^2\frac{m_1+2M}{n_1}$, скелетную характеристику для данной частоты $\eta_*^2 = 1 + \frac{3}{4}\frac{x_{1m}^2 n_3}{n_1}$ и обозначение $D = \frac{K}{\sqrt{n_1(m_1+2M)}}$, представляем (28), (29) как

$$x_{1m} = \frac{kK}{n_1}\frac{\sqrt{1+\frac{M^2}{K^2}\frac{n_1}{m_1+2M}\eta^2}}{\sqrt{(\eta_*^2-\eta^2)^2+D^2\eta^2}}, \tag{30}$$

$$\mathrm{tg}(\phi) = \frac{D\eta}{\eta_*^2-\eta^2}. \tag{31}$$

Таким образом, выражения (28), (29) или (30), (31) определяют основной гидроупругий отклик нижней стенки рассматриваемого канала, т. е. отклик на основном резонансе.

4. Численное моделирование основного гидроупругого отклика стенки канала при пульсирующем течении Куэтта

Найденные характеристики (30), (31) представляют собой неявные функции, что требует их численного исследования. Заметим, что данные выражения допускают следующие частные случаи: $M = 0$ – исключение из рассмотрения инерции движения жидкости, что эквивалентно полаганию в уравнениях динамики пульсирующего слоя вязкой жидкости (16) $\mathrm{Wo}^2 \to 0$; $n_3 = 0$ – переход к рассмотрению стенки, имеющей линейно-упругое закрепление на торцах. В последнем случае (30), (31) представляют собой явные функции, допускающие непосредственное вычисление амплитуды и фазы колебаний стенки по заданной частоте возмущающей силы.

Для примера реализации численного моделирования рассмотрим канал со следующими параметрами: $l = 0.15$ м, $\delta = 10^{-3}$ м, $b = 8l$, $m_1 = 3$ кг, $\rho = 1.84 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\nu = 2.53 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, $n_1 = 5 \cdot 10^4$ Н/м, $n_3 = 5 \cdot 10^8$ Н/м^3. При моделировании было проведено численное построение характеристик (30), (31) для следующих случаев:

1) взаимодействие стенки со слоем жидкости при учете инерции пульсирующего течения Куэтта для различных значений коэффициента виброперегрузки по скорости;

2) взаимодействие стенки со слоем жидкости без учета инерции последней (ползущее течение Куэтта, т. е. когда в (30), (31) положим $M = 0$) при различных значениях коэффициента виброперегрузки по скорости;

3) взаимодействие пластины с пульсирующим слоем жидкости при учете инерции его движения при варьировании значений коэффициента виброперегрузки по скорости и толщины слоя жидкости;

4) взаимодействие пластины с пульсирующим слоем жидкости для случая ползущего течения Куэтта при варьировании толщины слоя жидкости. Результаты расчетов представлены ниже на рис. 2–5.

Заметим, что при исключении из рассмотрения нелинейности упругого закрепления стенки канала на торцах, т. е. при полагании в (30) и (31) $n_3 = 0$, имеют место известные кривые амплитудных и фазовых частотных характеристик, соответствующих гармоническому осциллятору [32].

Выводы и заключение

В работе поставлена и решена задача гидроупругости для исследования продольных колебаний абсолютно жесткой стенки узкого канала, имеющей нелинейно-упругое закрепление на торцах. Рассмотрен случай вынужденных установившихся колебаний стенки за счет ее взаимодействия с противоположной вибрирующей стенкой через пульсирующий слой вязкой жидкости, заполняющей канал. Учет диссипативных свойств вязкой жидкости в узком канале дает возможность исключить из рассмотрения в исследуемой колебательной системе начальные условия, так как их влияние быстро перестает сказываться, и ограничиться постановкой краевой задачи математической физики (2)–(7). Проведенный асимптотический анализ поставленной задачи позволил показать, что исходная задача может быть сведена к рассмотрению нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (21), обобщающего уравнение Дуффинга. Решение этого уравнения для случая пульсирующего течения Куэтта с учетом инерции движения вязкой жидкости в узком канале выполнено с использованием метода Крылова – Боголюбова. На базе полученного решения определен гидроупругий отклик стенки канала в виде нелинейных амплитудной (30) и фазовой (31) частотных характеристик, представляющих собой неявные функции от амплитуды и частоты колебаний. Анализ данных характеристик и численное моделирование их поведения позволили сделать следующие выводы.

Вязкость жидкости, а также геометрические размеры канала полностью определяют значение коэффициента демпфирования в (21), т. е. демпфирующие свойства в рассматриваемой колебательной системе. Кроме того, учет инерции движения жидкости обуславливает увеличение инерционных свойств нелинейной колебательной системы, что проявляется в возникновении дополнительных членов в уравнении нелинейных гидроупругих колебаний (21) и дополнительной, так называемой присоединенной массы M. Данная масса также определяется физическими свойствами жидкости и геометрическими размерами канала.

Результаты моделирования, представленные на рис. 2–5, указывают на важность принятия во внимание инерции пульсирующего течения Куэтта при исследовании нелинейных колебаний нижней стенки рассматриваемого канала. А именно, сравнив характеристики на рис. 3 и 4, пришли к выводу, что при ползущем течении Куэтта (рис. 4), когда в (30), (31) принято $M = 0$, т. е. инерция жидкости исключена из рассмотрения, наблюдается снижение амплитуд колебаний и уменьшение значений резонансных частот. В результате этого имеем менее интенсивный изгиб характеристик кривых (30), (31) вправо. Известно [39], [40], что в области изгиба амплитудных характеристик нелинейных колебательных систем с кубической нелинейностью наблюдается скачкообразное изменение амплитуд колебаний. Следовательно, исключение инерции движения жидкости приводит к занижению границ области частот, на которых возможно возникновение неустойчивых колебаний со скачкообразным изменением амплитуд, а также заниженным оценкам амплитуд колебаний стенки. Увеличение коэффициента виброперегрузки по скорости приводит к росту как амплитуд колебаний, так и резонансных частот, и, как следствие, увеличению изгиба амплитудных и фазовых характеристик, как в случае учета инерции жидкости, так и при исключении инерции движения жидкости из рассмотрения.

Кроме того, моделирование показало существенное влияние толщины слоя жидкости на нелинейные колебания стенки. Например (см. рис. 4), при учете инерции движения жидкости увеличение толщины слоя жидкости при фиксированных значениях амплитуды виброскорости противоположной стенки ведет к существенному росту амплитуд колебаний нижней стенки канала. С другой стороны (см. рис. 5), при исключении из рассмотрения инерции движения жидкости и фиксации коэффициента виброперегрузки по скорости, уменьшение толщины слоя жидкости приводит к расширению резонансной области (увеличению добротности), что непосредственно следует из аналитических выражений для (30), (31).

Сформулированная в работе новая математическая модель и представленные результаты численного моделирования гидроупругого отклика стенки узкого канала, имеющей нелинейно-упругое закрепление на торцах, за счет взаимодействия со слоем вязкой жидкости при пульсирующем течении Куэтта, могут быть использованы для анализа работы элементов гидроприводов и динамических гидропередач, а также найти применение в технологиях неразрушающей вибрационной диагностики различных изделий современного машиностроения.

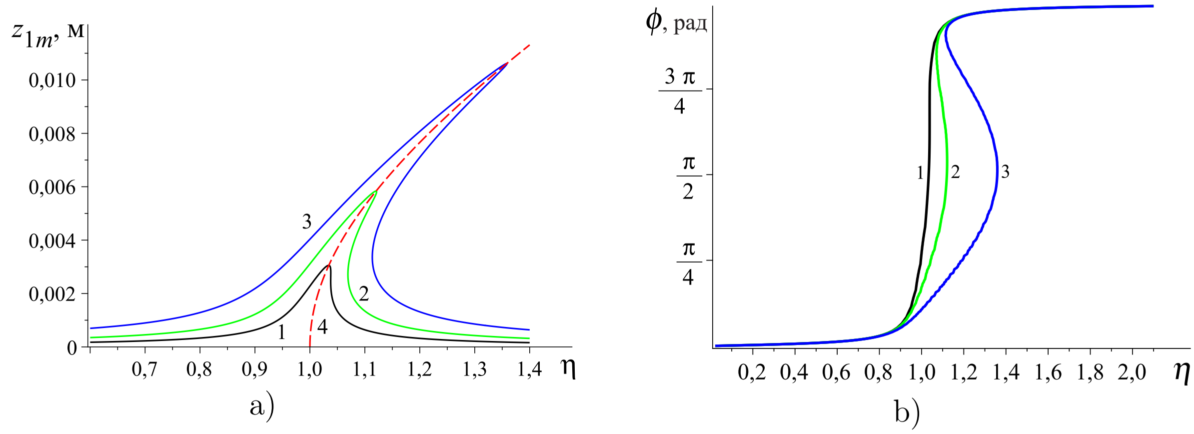

Рис. 2. Гидроупругий отклик стенки канала, амплитудная характеристика (a) и фазовый сдвиг (б) при учете инерции пульсирующего течения Куэтта: 1 – коэффициент виброперегрузки по скорости $k = 0.3$; 2 – коэффициент виброперегрузки по скорости $k = 0.6$; 3 – коэффициент виброперегрузки по скорости $k = 1.2$; 4 – скелетная кривая η_*; здесь безразмерной частоте $\eta_* = 1$ соответствует размерная частота $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1+2M}}$

Fig. 2. Hydroelastic response of the channel wall, amplitude characteristic (a) and phase shift (b) considering the inertia of the pulsating Couette flow: 1 – the coefficient determining vibration overload by speed $k = 0.3$; 2 – the coefficient determining vibration overload by speed $k = 0.6$; 3 – the coefficient determining vibration overload by speed $k = 1.2$; 4 – backbone curve η_*; the dimensionless frequency $\eta_* = 1$ corresponds to the dimensional frequency $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1+2M}}$

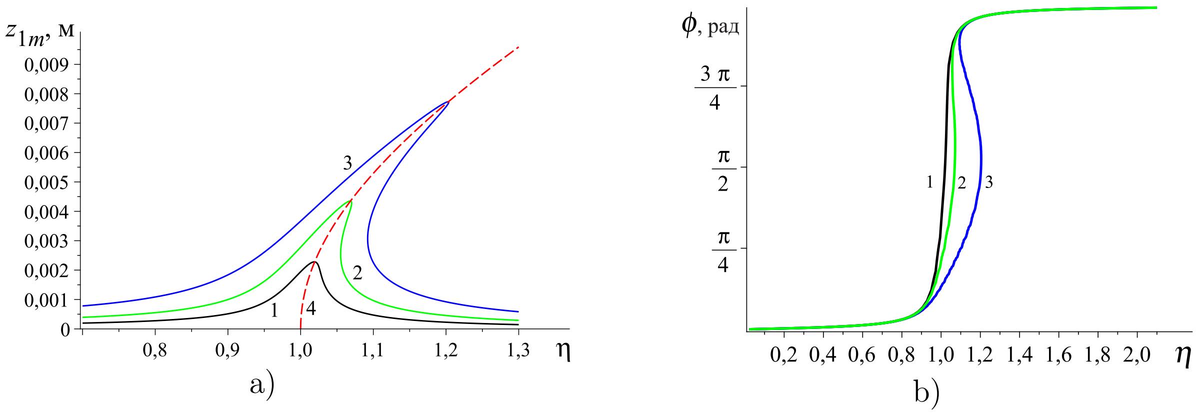

Рис. 3. Гидроупругий отклик стенки канала, амплитудная характеристика (a) и фазовый сдвиг (б) при учете инерции пульсирующего течения Куэтта: 1 – коэффициент виброперегрузки по скорости $k = 0.3$; 2 – коэффициент виброперегрузки по скорости $k = 0.6$; 3 – коэффициент виброперегрузки по скорости $k = 1.2$; 4 – скелетная кривая η_*; здесь безразмерной частоте $\eta_* = 1$ соответствует размерная частота $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1}}$

Fig. 3. Hydroelastic response of the channel wall, amplitude characteristic (a) and phase shift (b) considering the inertia of the pulsating Couette flow: 1 – the coefficient determining vibration overload by speed $k = 0.3$; 2 – the coefficient determining vibration overload by speed $k = 0.6$; 3 – the coefficient determining vibration overload by speed $k = 1.2$; 4 – backbone curve η_*; the dimensionless frequency $\eta_* = 1$ corresponds to the dimensional frequency $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1}}$

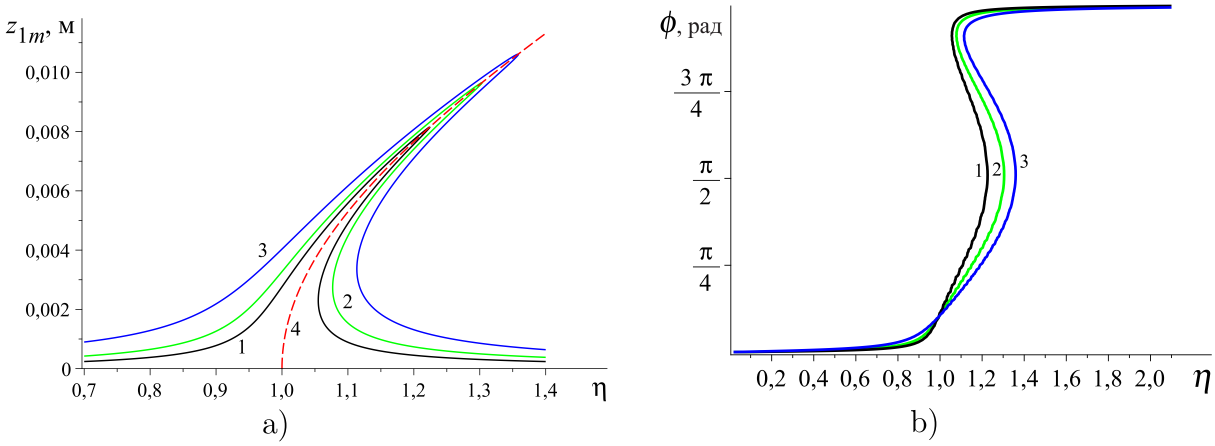

Рис. 4. Гидроупругий отклик стенки канала, амплитудная характеристика (а) и фазовый сдвиг (б) при учете инерции пульсирующего течения Куэтта: 1 – коэффициент виброперегрузки по скорости $k = 0.3$ и толщина слоя жидкости 2δ; 2 – коэффициент виброперегрузки по скорости $k = 0.6$ и толщина слоя жидкости 1.5δ; 3 – коэффициент виброперегрузки по скорости $k = 1.2$ и толщина слоя жидкости δ; 4 – скелетная кривая η_*; здесь безразмерной частоте $\eta_* = 1$ соответствует размерная частота $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1+2M}}$

Fig. 4. Hydroelastic response of the channel wall, amplitude characteristic (a) and phase shift (b) considering the inertia of the pulsating Couette flow: 1 – the coefficient determining vibration overload by speed $k = 0.3$ and the liquid layer thickness 2δ; 2 – the coefficient determining vibration overload by speed $k = 0.6$ and the liquid layer thickness 1.5δ; 3 – the coefficient determining vibration overload by speed $k = 1.2$ and the liquid layer thickness δ; 4 – backbone curve η_*; the dimensionless frequency $\eta_* = 1$ corresponds to the dimensional frequency $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1+2M}}$

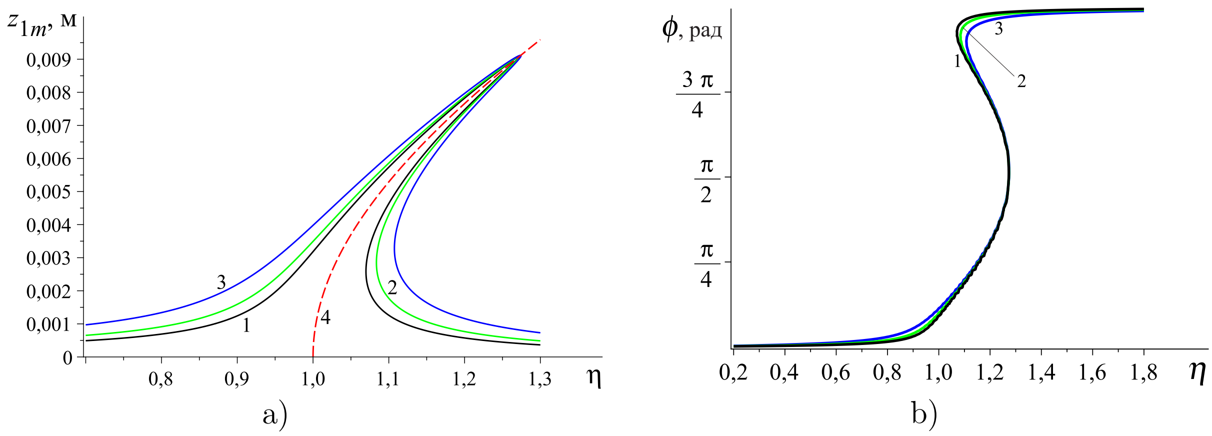

Рис. 5. Гидроупругий отклик стенки канала, амплитудная характеристика (а) и фазовый сдвиг (б) при ползущем пульсирующем течении Куэтта и коэффициенте виброперегрузки по скорости $k = 1.5$: 1 – толщина слоя жидкости 2δ; 2 – толщина слоя жидкости 1.5δ; 3 – толщина слоя жидкости δ; 4 – скелетная кривая η_*; здесь безразмерной частоте $\eta_* = 1$ соответствует размерная частота $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1}}$

Fig. 5. Hydroelastic response of the channel wall, amplitude characteristic (a) and phase shift (b) under the creeping pulsating Couette flow with the coefficient determining vibration overload by speed $k = 1.5$: 1 – liquid layer thickness 2δ; 2 – liquid layer thickness 1.5δ; 3 – liquid layer thickness δ; 4 – backbone curve η_*; the dimensionless frequency $\eta_* = 1$ corresponds to the dimensional frequency $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1}}$

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н.* Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 592 с.

2. *Païdoussis M.P.* Fluid-Structure Interactions. V. 2: Slender structures and axial flow. London: Acad. Press, 2016. xviii, 924 p. https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4.

3. *Païdoussis M.P., Price S.J., de Langre E.* Fluid-Structure Interactions: Cross-Flow-Induced Instabilities. New York, NY: Cambridge Univ. Press, 2011. x, 402 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511760792.

4. *Lamb H.* On the vibrations of an elastic plate in contact with water // Proc. R. Soc. A. 1920. V. 98, No 690. P. 205–216. https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064.

5. *Amabili M., Kwak M.K.* Free vibrations of circular plates coupled with liquids: Revising the Lamb problem // J. Fluids Struct. 1996. V. 10, No 7. P. 743–761. https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051.

6. *Kozlovsky Y.* Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model // J. Sound Vib. 2009. V. 326, Nos 1–2. P. 332–339. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031.

7. *Womersley J.R.* Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known // J. Physiol. 1955. V. 127, No 3. P. 553–563. http://doi.org/10.1113/jphysiol.1955.sp005276.

8. *Faria C.T., Inman D.J.* Modeling energy transport in a cantilevered Euler–Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // Mech. Syst. Signal Process. 2014. V. 45, No 2. P. 317–329. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.12.003.

9. *Lomakin E., Rabinskiy L., Radchenko V., Solyaev Y., Zhavoronok S., Babaytsev A.* Analytical estimates of the contact zone area for a pressurized flat-oval cylindrical shell placed between two parallel rigid plates // Meccanica. 2018. V. 53, No 15. P. 3831–3838. https://doi.org/10.1007/s11012-018-0919-y.

10. *Бочкарев С.А., Лекомцев С.В., Матвеенко В.П.* Гидроупругая устойчивость прямоугольной пластины, взаимодействующей со слоем текущей идеальной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 6. С. 108–120. https://doi.org/10.7868/S0568528116060049.

11. *Лекомцев С.В., Матвеенко В.П., Сенин А.Н.* Собственные колебания и гидроупругая устойчивость пластины с пьезоэлементом, подключенным к внешней RL-цепи // Вестн. ПНИПУ. Механ. 2023. № 3. С. 97–113. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.3.09.

12. *Indeitsev D.A., Osipova E.V.* Nonlinear effects in trapped modes of standing waves on the surface of shallow water // Tech. Phys. 2000. V. 45, No 12. P. 1513–1517. https://doi.org/10.1134/1.1333186.

13. *Akrish G., Rabinovitch O., Agnon Y.* Hydroelasticity and nonlinearity in the interaction between water waves and an elastic wall // J. Fluid Mech. 2018. V. 845. P. 293–320. https://doi.org/10.1017/jfm.2018.207.

14. *Павлов В.А., Павловский А.С., Семенова Н.Г.* Нелинейные эффекты в поле вязких волн, возбужденном пластиной конечных размеров // ЖТФ. 2019. Т. 89, № 10. С. 1500–1505. https://doi.org/10.21883/JTF.2019.10.48164.2147.

15. *Schipitsyn V.D., Kozlov V.G.* Oscillatory and steady dynamics of a cylindrical body near the border of vibrating cavity filled with liquid // Microgravity Sci. Technol. 2018. V. 30, No 1. P. 103–112. https://doi.org/10.1007/s12217-017-9583-4.

16. *Щипицын В.Д.* Колебания неосесимметричного цилиндра в заполненной жидкостью полости, совершающей вращательные осцилляции // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46, № 15. С. 43–46. https://doi.org/10.21883/PJTF.2020.15.49749.18349.

17. *Tsarenko S.N., Kostenko A.V., Ignatkina E.L., Ponamareva E.A.* Simulating interaction of liquid steel with gate wall at harmonic motion // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2022. V. 988. Art. 052013. https://doi.org/10.1088/1755-1315/988/5/052013.

18. *Taktarov N.G., Runova O.A., Khramova N.A.* Mathematical model of the viscous fluid motion caused by the oscillation of a flat porous surface // ARPN J. Eng. Appl. Sci. 2018. V. 13, No 24. P. 9715–9721.

19. *Базаркина О.А., Тактаров Н.Г.* Вращательные колебания пористой сферической оболочки в вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 6. С. 98–105. https://doi.org/10.31857/S0568528120060043.

20. *Сенницкий В.Л.* О движении вязкой жидкости со свободной границей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 166, № 1. С. 99–110. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.99-110.

21. *Сенницкий В.Л.* Эффекты вращательного движения жидкости между криволинейными стенками // Изв. вузов. ПНД. 2025. Т. 33, вып. 2. С. 219–232. https://doi.org/10.18500/0869-6632-003155.

22. *Турчак Л.И., Шидловский В.П.* Математическое моделирование проблем газовой смазки // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51, № 2. С. 329–348.

23. *Редер Т., Тененев В.А., Чернова А.А.* Численное моделирование неустойчивых режимов работы предохранительного клапана // Вестн. ТГУ. Матем. и механ. 2020. № 68. С. 141–157. https://doi.org/10.17223/19988621/68/13.

24. *Королева М.Р., Мищенкова О.В., Редер Т., Тененев В.А., Чернова А.А.* Численное моделирование процесса срабатывания предохранительного клапана // Комп. исслед. и моделир. 2018. Т. 10, № 4. С. 495–509. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-4-495-509.

25. *Popov V.S., Popova A.A.* Mathematical modeling of the aeroelastic response of a disk having a nonlinear elastic suspension and interacting with a layer of viscous gas // J. Mach. Manuf. Reliab. 2024. V. 53, No 4. P. 370–378. https://doi.org/10.1134/S1052618824700249.

26. *Попов В.С., Попова А.А.* Нелинейные аэроупругие колебания стенки плоского канала, заполненного вязким газом и установленного на вибрирующем основании // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 166, № 2. С. 220–237. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.220-237.

27. *Kurzin V.B.* Streamwise vibrations of a plate in a viscous fluid flow in a channel, induced by forced transverse vibrations of the plate // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2011. V. 52, No 3. P. 459–463. https://doi.org/10.1134/S0021894411030163.

28. *Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N.* Mathematical modeling of elastically fixed wall longitudinal oscillations of wedge-shaped channel under foundation vibration // Int. J. Comput. Civ. Struct. Eng. 2016. V. 12, No 4. P. 9–17.

29. *Barulina M., Santo L., Popov V., Popova A., Kondratov D.* Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations // Mathematics. 2022. V. 10, No 20. Art. 3844. https://doi.org/10.3390/math10203844.

30. *Валландер С.В.* Лекции по гидроаэромеханике. Л.: ЛГУ, 1978. 296 с.

31. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.

32. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.

33. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

34. *Womersley J.R.* XXIV. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube–I: The linear approximation for long waves // London, Edinburgh, Dublin, Philos. Mag. J. Sci. Ser. 7. 1955. V. 46, No 373. P. 199–221. http://dx.doi.org/10.1080/14786440208520564.

35. *Van Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1975. xiv, 271 p.

36. *Nayfeh A.H.* Problems in Perturbations. New York, NY: Wiley, 1985. 556 p.

37. *Popov V.S., Mogilevich L.I., Popova A.A.* Nonlinear oscillations of a plate resting on a nonlinear elastic foundation and forming the bottom of a plane channel filled with a viscous gas // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2024. V. 20, No 4. P. 581–599. https://doi.org/10.20537/nd241101.

38. *Попов В.С., Попова А.А.* Моделирование гидроупругих колебаний стенки канала, имеющей нелинейно-упругую опору // Комп. исслед. и моделир. 2022. Т. 14. № 1. С. 79–92. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-1-79-92.

39. *Nayfeh A.H., Mook D.T.* Nonlinear Oscillations. New York, NY: Wiley, 1979. xiv, 704 p.

40. *Brennan M.J., Kovacic I., Carrella A., Waters T.P.* On the jump-up and jump-down frequencies of the Duffing oscillator // J. Sound Vib. 2008. V. 318, Nos 4–5. P. 1250–1261. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.04.032.

References

1. Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev A.T., Shklyarchuk F.N. *Aerogidrouprugost' konstruktsii* [Aeroelasticity of Structures]. Moscow, Fizmatlit, 2000. 592 p. (In Russian)

2. Païdoussis M.P. *Fluid-Structure Interactions.* Vol. 2: Slender structures and axial flow. London, Acad. Press, 2016. xviii, 924 p. https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4.

3. Païdoussis M.P., Price S.J., de Langre E. *Fluid-Structure Interactions: Cross-Flow-Induced Instabilities.* New York, NY, Cambridge Univ. Press, 2011. x, 402 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511760792.

4. Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water. *Proc. R. Soc. A*, 1920, vol. 98, no. 690, pp. 205–216. https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064.

5. Amabili M., Kwak M.K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: Revising the Lamb problem. *J. Fluids Struct.*, 1996, vol. 10, no. 7, pp. 743–761. https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051.

6. Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model. *J. Sound Vib.*, 2009, vol. 326, nos. 1–2, pp. 332–339. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031.

7. Womersley J.R. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *J. Physiol.*, 1955, vol. 127, no. 3, pp. 553–563. http://doi.org/10.1113/jphysiol.1955.sp005276.

8. Faria C.T., Inman D.J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler–Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2014, vol. 45, no. 2, pp. 317–329. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.12.003.

9. Lomakin E., Rabinskiy L., Radchenko V., Solyaev Y., Zhavoronok S., Babaytsev A. Analytical estimates of the contact zone area for a pressurized flat-oval cylindrical shell placed between two parallel rigid plates. *Meccanica*, 2018, vol. 53, no. 15, pp. 3831–3838. https://doi.org/10.1007/s11012-018-0919-y.

10. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Hydroelastic stability of a rectangular plate interacting with a layer of ideal flowing fluid. *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 6, pp. 821–833. https://doi.org/10.1134/S0015462816060132.

11. Lekomtsev S.V., Matveenko V.P., Senin A.N. Natural vibrations and hydroelastic stability of a plate with a piezoelectric element connected to an external RL circuit. *Vestn. Permsk. Nats. Issled. Politekh. Univ. Mekh.*, 2023, no. 3, pp. 97–113. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.3.09. (In Russian)

12. Indeitsev D.A., Osipova E.V. Nonlinear effects in trapped modes of standing waves on the surface of shallow water. *Tech. Phys.*, 2000, vol. 45, no. 12, pp. 1513–1517. https://doi.org/10.1134/1.1333186.

13. Akrish G., Rabinovitch O., Agnon Y. Hydroelasticity and nonlinearity in the interaction between water waves and an elastic wall. *J. Fluid Mech.*, 2018, vol. 845, pp. 293–320. https://doi.org/10.1017/jfm.2018.207.

14. Pavlov V.A., Pavlovskii A.S., Semenova N.G. Nonlinear effects in a viscous wave field excited by a finite-size plate. *Tech. Phys.*, 2019, vol. 64, no. 10, pp. 1418–1423. https://doi.org/10.1134/S1063784219100165.

15. Schipitsyn V.D., Kozlov V.G. Oscillatory and steady dynamics of a cylindrical body near the border of vibrating cavity filled with liquid. *Microgravity Sci. Technol.*, 2018, vol. 30, no. 1, pp. 103–112. https://doi.org/10.1007/s12217-017-9583-4.

16. Schipitsyn V.D. Vibrations of a nonaxisymmetric cylinder in a cavity filled with liquid and performing rotational oscillations. *Tech. Phys. Lett.*, 2020, vol. 46, no. 8, pp. 771–774. https://doi.org/10.1134/S1063785020080143.

17. Tsarenko S.N., Kostenko A.V., Ignatkina E.L., Ponamareva E.A. Simulating interaction of liquid steel with gate wall at harmonic motion. *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.*, 2022, vol. 988, art. 052013. https://doi.org/10.1088/1755-1315/988/5/052013.

18. Taktarov N.G., Runova O.A., Khramova N.A. Mathematical model of the viscous fluid motion caused by the oscillation of a flat porous surface. *ARPN J. Eng. Appl. Sci.*, 2018, vol. 13, no. 24, pp. 9715–9721.

19. Bazarkina O.A., Taktarov N.G. Rotational oscillations of a porous spherical shell in viscous fluid. *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 6, pp. 817–824. https://doi.org/10.1134/S001546282006004X.

20. Sennitskii V.L. On the motion of a viscous liquid with a free boundary. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 99–110. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.99-110. (In Russian)

21. Sennitskii V.L. Effects of a rotational motion of a liquid between curvilinear walls. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Prikl. Nelineinaya Din.*, 2025, vol. 33, no. 2, pp. 219–232. https://doi.org/10.18500/0869-6632-003155. (In Russian)

22. Turchak L.I., Shidlovskii V.P. Mathematical modeling of gas lubrication problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 2, pp. 308–325. https://doi.org/10.1134/S0965542511020151.

23. Raeder T., Tenenev V.A., Chernova A.A. Numerical simulation of unstable safety valve modes. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2020, no. 68, pp. 141–157. https://doi.org/10.17223/19988621/68/13. (In Russian)

24. Koroleva M.R., Mishchenkova O.V., Raeder T., Tenenev V.A., Chernova A.A. Numerical simulation of safety valve activation process. *Komp'yut. Issled. Model.*, 2018, vol. 10, no. 4, pp. 495–509. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-4-495-509. (In Russian)

25. Popov V.S., Popova A.A. Mathematical modeling of the aeroelastic response of a disk having a nonlinear elastic suspension and interacting with a layer of viscous gas. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2024, vol. 53, no. 4, pp. 370–378. https://doi.org/10.1134/S1052618824700249.

26. Popov V.S., Popova A.A. Nonlinear aeroelastic oscillations in the wall of a flat channel filled with viscous gas and resting on a vibrating foundation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 220–237. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.220-237. (In Russian)

27. Kurzin V.B. Streamwise vibrations of a plate in a viscous fluid flow in a channel, induced by forced transverse vibrations of the plate. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2011, vol. 52, no. 3, pp. 459–463. https://doi.org/10.1134/S0021894411030163.

28. Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N. Mathematical modeling of elastically fixed wall longitudinal oscillations of wedge-shaped channel under foundation vibration. *Int. J. Comput. Civ. Struct. Eng.*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 9–17.

29. Barulina M., Santo L., Popov V., Popova A., Kondratov D. Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 20, art. 3844. https://doi.org/10.3390/math10203844.

30. Vallander S.V. *Lektsii po gidroaeromekhanike* [Lectures on Hydroaeromechanics]. Leningrad, LGU, 1978. 296 p. (In Russian)

31. Loitsyanskiy *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of Liquids and Gases]. Moscow, Drofa, 2003. 840 p. (In Russian)

32. Panovko Ya.G. *Vvedenie v teoriyu mekhnicheskikh kolebanii* [An Introduction to the Theory of Mechanical Oscillation]. Moscow, Nauka, 1991. 256 p. (In Russian)

33. Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebanii* [Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations]. Moscow, Nauka, 1974. 504 p. (In Russian)

34. Womersley J.R. XXIV. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube–I: The linear approximation for long waves. *London, Edinburgh, Dublin, Philos. Mag. J. Sci. Ser.* 7, 1955, vol. 46, no. 373, pp. 199–221. http://dx.doi.org/10.1080/14786440208520564.

35. Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics.* Stanford, CA, The Parabolic Press, 1975. xiv, 271 p.

36. Nayfeh A.H. *Problems in Perturbations.* New York, NY, Wiley, 1985. 556 p.

37. Popov V.S., Mogilevich L.I., Popova A.A. Nonlinear oscillations of a plate resting on a nonlinear elastic foundation and forming the bottom of a plane channel filled with a viscous gas. *Russ. J. Nonlinear Dyn.*, 2024, vol. 20, no. 4, pp. 581–599. https://doi.org/10.20537/nd241101.

38. Popov V.S., Popova A. Modeling of hydroelastic oscillations for a channel wall possessing a nonlinear elastic support. *Komp'yut. Issled. Model.*, 2022, vol. 14, no. 1, pp. 79–92. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-1-79-92. (In Russian)

39. Nayfeh A.H., Mook D.T. *Nonlinear Oscillations.* New York, NY, Wiley, 1979. xiv, 704 p.

40. Brennan M.J., Kovacic I., Carrella A., Waters T.P. On the jump-up and jump-down frequencies of the Duffing oscillator. *J. Sound Vib.*, 2008, vol. 318, nos. 4–5, pp. 1250-1261. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.04.032.

Информация об авторах

Виктор Сергеевич Попов, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ», Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.; главный научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук

E-mail: *vic_p@bk.ru*

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9582-7195

Анна Александровна Попова, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ», Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

E-mail: *anay_p@bk.ru*

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7786-1680

Александр Викторович Черненко, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры «Прикладная математика и системный анализ», Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

E-mail: *3chav@mail.ru*

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9146-2379

Мария Викторовна Попова, студент факультета «Фундаментальная медицина и медицинские технологии», Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: *mari.popova.2004@internet.ru*

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1460-7172

Author Information

Victor S. Popov, Dr. Sci. (Engineering), Full Professor, Department of Applied Mathematics and Systems Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov; Chief Researcher, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences

E-mail: *vic_p@bk.ru*

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9582-7195

Anna A. Popova, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Systems Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

E-mail: *anay_p@bk.ru*

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7786-1680

Aleksandr V. Chernenko, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics and Systems Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

E-mail: *3chav@mail.ru*

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9146-2379

Maria V. Popova, Student, Faculty of Fundamental Medicine and Medical Technologies, Saratov State University

E-mail: *mari.popova.2004@internet.ru*

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1460-7172

Поступила в редакцию 26.04.2025

Принята к публикации 10.05.2025

Received April 26, 2025

Accepted May 10, 2025