

ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.282-310>

**Формы потери устойчивости и разрушения
тест-образцов из волокнистых композитов
со структурой $[0^\circ]_s$ при испытаниях на осевое сжатие.
Теория и эксперимент**

В.Н. Паймушин¹ ✉, С.А. Холмогоров¹, М.В. Макаров^{1,2},
Н.В. Левшонкова¹, М.А. Шишов¹

¹Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ,
г. Казань, Россия

²Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

✉ vpajmushin@mail.ru

Аннотация

Проведен анализ построенных аналитических решений задач о макромасштабных изгибно-сдвиговых и чисто поперечно-сдвиговых формах потери устойчивости (ФПУ) тест-образцов из волокнистых композитов со структурой $[0^\circ]_s$ (s – число монослоев), а также мезомасштабных поперечно-сдвиговых ФПУ их периферийных слоев при осевом сжатии. Рассмотрены материалы, которые характеризуются физически нелинейной зависимостью лишь между формируемыми поперечными касательными напряжениями и соответствующими сдвиговыми деформациями. Решения получены при использовании трех вариантов линеаризованных уравнений равновесия в возмущенном состоянии, основанных на простейшей уточненной модели С.П. Тимошенко; аппроксимации прогиба линейным законом, а осевых перемещений – кубическим полиномом по поперечной координате при предварительном удовлетворении граничным условиям по тангенциальным усилиям (первый уточненный вариант теории; модель типа Редди – Немировского) и без предварительного удовлетворения таким условиям (второй уточненный вариант теории). В использованных линеаризованных уравнениях физическая нелинейность материала учтена в соответствии с концепцией Шенли на основе рассмотрения касательного модуля поперечного сдвига. Дано сравнение теоретических результатов с экспериментальными.

Ключевые слова: волокнистый композит, тест-образец, сжатие, теоретическое исследование, экспериментальное исследование, форма потери устойчивости, форма разрушения

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект FZSU-2024-0010, введение, разделы 1, 4) и Программы стратегического академического лидерства Казанского федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030», разделы 2, 3).

Для цитирования: Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Макаров М.В., Левшонкова Н.В., Шишов М.А. Формы потери устойчивости и разрушения тест-образцов из волокнистых композитов со структурой $[0^\circ]_s$ при испытаниях на осевое сжатие. Теория и эксперимент // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 282–310.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.282-310>.

REVIEW ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.282-310>

Buckling modes and failure of test specimens from fiber-reinforced composites with a $[0^\circ]_s$ layup under axial compression. Theory and experiment

V.N. Paimushin¹ ✉, S.A. Kholmogorov¹, M.V. Makarov^{1,2},
N.V. Levshonkova¹, M.A. Shishov¹

¹*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russia*

²*Kazan Federal University, Kazan, Russia*

✉ vpajmushin@mail.ru

Abstract

The analytical solutions for the problems of macroscale flexural-shear and purely transverse-shear buckling modes of test specimens made of fiber-reinforced composites with a $[0^\circ]_s$ layup (s denoting the number of laminas) were analyzed, as well as the problems of mesoscale transverse-shear buckling modes of their peripheral layers under axial compression. Composite materials characterized by a physically nonlinear relationship only between transverse tangential stresses and the corresponding shear strains were examined. The solutions were obtained using three variants of linearized equations of the equilibrium in a perturbed state: based on the simplest refined S.P. Timoshenko's model; from a linear approximation of the deflection and a cubic polynomial approximation of the axial displacements in the transverse coordinate with the preliminary satisfaction of the boundary conditions for tangential forces (the first refined version of the theory; Reddy–Nemirovsky model type); and without the preliminary satisfaction of such conditions (the second refined version of the theory). The physical nonlinearity of the material was incorporated in the linearized equations following the Shanley concept by introducing the tangential shear modulus. The theoretical data were compared with the experimental results.

Keywords: fiber-reinforced composite, test specimen, compression, theoretical study, experimental study, buckling mode, failure mode

Acknowledgments. This study was performed as part of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FZSU-2024-0010, Introduction, Sections 1, 4) and supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program («PRIORITY-2030», Sections 2, 3).

For citation: Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Levshonkova N.V., Shishov M.A. Buckling modes and failure of test specimens from fiber-reinforced composites with a $[0^\circ]_s$ layup under axial compression. Theory and experiment. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 282–310. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.282-310>. (In Russian)

Введение

Несмотря на имеющуюся теорию деформирования и разрушения композиционных материалов, развитую за последние 50 лет и, казалось бы, вполне законченную, исследованиям в области механики деформирования и разрушения волокнистых композитов вплоть до настоящего времени уделяется значительное внимание как зарубежными, так и отечественными исследователями [1–9].

Широкий круг задач о разрушении волокнистых композитных материалов описан в монографии [10]. В ней выделены основные и наиболее характерные формы разрушения типичных тест-образцов при сжатии, которые приведены на рис. 1.

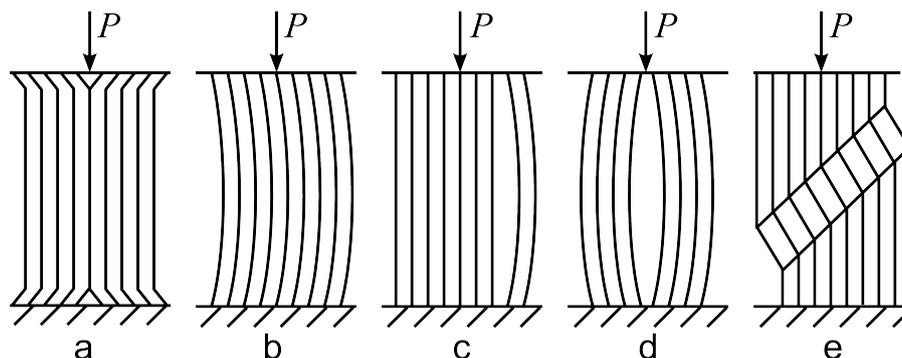


Рис. 1. Возможные виды разрушения при сжатии композитных образцов: а) смятие по торцам, б) макрвыпучивание, в) выщелкивание полоски, г) расслоение посередине, е) образование полосы сдвига

Fig. 1. Possible failure modes of composite specimens under compression: а) end crushing, б) macrobuckling, в) strip delamination, г) delamination in the middle, е) shear band formation

Современные общепотребительные стандарты испытаний композиционных материалов на сжатие требуют использования специальных захватов, которые в зависимости от своей конструкции могут реализовать один из трех видов передачи нагрузки на тест-образец (см. рис. 2). В экспериментальной механике наиболее благоприятной с точки зрения отсутствия концентрации напряжений считается третья схема приложения усилий на сжатие, в которой за счет клиновых захватов и торцевого упора нагрузка на тест-образец передается через три компоненты напряжений: осевую σ_{11}^0 , касательную σ_{13}^0 и поперечную сжимающую σ_{33}^0 .

Одно из направлений исследований в механике деформирования композитных волокнистых материалов связано с задачами о внутренних и поверхностных формах потери устойчивости армирующей и связующей фаз. Связано это с тем, что при разрушении

слоистых композитов одной из причин разрушения является потеря устойчивости армирующей фазы, что может привести к разрушению всей структуры материала в целом. В этой области исследований опубликованы монографии [11, 12].

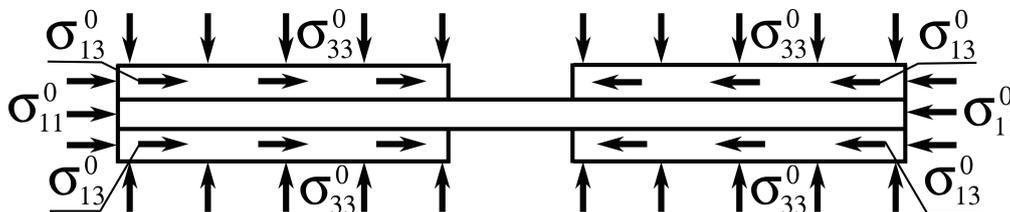


Рис. 2. Схемы нагружения образцов при испытаниях на сжатие: 1) $\sigma_{11}^0 \neq 0$, $\sigma_{33}^0 = 0$ ($\sigma_{13}^0 = 0$); 2) $\sigma_{33}^0 \neq 0$ ($\sigma_{13}^0 \neq 0$), $\sigma_{11}^0 = 0$; 3) $\sigma_{11}^0 \neq 0$, $\sigma_{33}^0 \neq 0$ ($\sigma_{13}^0 \neq 0$)

Fig. 2. Diagrams of loading modes during the compression tests: 1) $\sigma_{11}^0 \neq 0$, $\sigma_{33}^0 = 0$ ($\sigma_{13}^0 = 0$); 2) $\sigma_{33}^0 \neq 0$ ($\sigma_{13}^0 \neq 0$), $\sigma_{11}^0 = 0$; 3) $\sigma_{11}^0 \neq 0$, $\sigma_{33}^0 \neq 0$ ($\sigma_{13}^0 \neq 0$)

Вид разрушения, связанный с потерей устойчивости армирующей фазы, описан в справочнике [13] и работе [14]. Эти результаты получили развитие в [1, 15–18]. Общий анализ полученных результатов и направлений дальнейших исследований можно найти в работах обзорного характера [4, 19–21]. Уточненные модели деформирования тест-образцов, сжатых вдоль волокон, предложены авторами в статьях [22, 23].

1. Физико-механические характеристики волокнистого композита на полимерной основе в осях ортотропии

Экспериментальное определение физико-механических характеристик композитных материалов (КМ) на основе проведения тех или иных испытаний является неотъемлемой частью технологического процесса проектирования и изготовления с их применением конструкций того или иного назначения. Для волокнистых КМ на полимерной основе в соответствии с существующими стандартами испытания проводят, как правило, на плоских тест-образцах, имеющих толщину h и ту или иную ориентацию волокон, расположенных в матрице. Наиболее простыми в реализации являются испытания на растяжение образцов со структурами $[0^\circ]_s$ и $[90^\circ]_s$ (s – число монослоев в образце) с волокнами, расположенными вдоль и поперек направления действующей нагрузки и имеющими небольшие значения s и толщины h . Для КМ с углеродными волокнами характерными являются диаграммы нагружения, являющиеся линейными вплоть до разрушения образцов. Исходя из результатов таких испытаний, для монослоя композита определяют модули упругости первого рода E_1^+ (в направлении волокон), E_2^+ (в направлении поперек волокон) и коэффициент Пуассона ν_{12}^+ . Они связаны с другим коэффициентом Пуассона ν_{21}^+ зависимостью $E_1^+ \nu_{21}^+ = E_2^+ \nu_{12}^+$. Определяют также предельные напряжения σ_1^{+*} и σ_2^{+*} в направлениях осей ортотропии x_1 и x_2 , при достижении которых в условиях растяжения происходит разрушение образца. Заметим, что для волокнистого композитного материала, изготовленного из препрега HSE 180 REM на основе углеродной фибры с прямолинейными волокнами, указанные характеристики, найденные в работе [24] и использованные в статьях [25, 26], равны $E_1^+ = 133$ ГПа, $E_2^+ = 5.9$ ГПа, $\nu_{12}^+ = 0.29$, $\nu_{21}^+ = 0.0126$, $\sigma_1^{+*} = 2490$ МПа, $\sigma_2^{+*} = 17.2$ МПа. Более сложными в реализации являются испытания на сжатие тест-образцов со структурами $[0^\circ]_s$, $[90^\circ]_s$ и $[\pm 45^\circ]_{2s}$ в силу возможной потери ими устойчивости по той или иной форме и наблюдаемого продольно-поперечного изгиба (хотя и

малого), особенно при выдержке тест-образца под нагрузкой в течение длительного времени. При испытаниях на сжатие до разрушения тест-образцов со структурами $[0^\circ]_s$ и $[90^\circ]_s$ соответствующие диаграммы деформирования $\sigma_1^- = \sigma_1^-(\varepsilon_1)$ и $\sigma_2^- = \sigma_2^-(\varepsilon_2)$ с большой степенью точности допустимо считать линейными вплоть до разрушения образцов, а определяемые на их основе модули упругости E_1^-, E_2^- и коэффициенты Пуассона ν_{12}^-, ν_{21}^- – практически совпадающими со значениями $E_1^+, E_2^+, \nu_{12}^+, \nu_{21}^+$. Однако определяемое при этом предельное напряжение σ_1^{-*} , при достижении которого в условиях сжатия происходит разрушение образца, оказывается намного ниже значения σ_1^{+*} . В соответствии с результатами многочисленных исследований ([1–9] и др.) допустимо считать, что предельное напряжение σ_1^{-*} сжатия тест-образца, имеющего структуру $[0^\circ]_s$, соответствует потере им устойчивости по чисто поперечно-сдвиговой форме, которая реализуется при значении касательного модуля поперечного сдвига \tilde{G}_{13}^{-*} материала тест-образца в плоскости $x_1, x_3 = z$, равном $\tilde{G}_{13}^{-*} = \sigma_1^{-*}$. Такой вид разрушения образца (рис. 1, е) реализуется только при соответствующих немалой его толщине h и короткой рабочей длине L между захватами приспособления, используемого при испытаниях (рис. 2).

Для определения модуля сдвига G_{12} в осях ортотропии x_1, x_2 проводят испытания на растяжение и сжатие тест-образцов со структурой $[\pm 45^\circ]_{2s}$ с четным числом монослоев $2s$. Их результатом являются диаграммы деформирования, дающие зависимости $\sigma_x^\pm = \sigma_x^\pm(\varepsilon_x^\pm)$ между нормальными напряжениями растяжения (σ_x^+) и сжатия (σ_x^-) образца и соответствующими осевыми деформациями в направлении растяжения (ε_x^+) и сжатия (ε_x^-) (рис. 3, а), а также предельные напряжения σ_x^{+*} и σ_x^{-*} , при достижении которых происходит разрушение образца. Исходя из таких диаграмм деформирования образца, при использовании выведенных в [27,28] соотношений вида

$$\sigma_{12}^\pm = \frac{\sigma_x^\pm}{2}, \quad \gamma_{12}^\pm = \frac{2(1 + \nu_{xy}^\pm)}{2 + \varepsilon_x^\pm(1 - \nu_{xy}^\pm)} \varepsilon_x^\pm \approx (1 + \nu_{xy}^\pm) \varepsilon_x^\pm \quad (1)$$

можно построить диаграммы деформирования при сдвиге $\sigma_{12}^\pm = \sigma_{12}^\pm(\gamma_{12}^\pm)$ (рис. 3, б), дающие зависимости между касательными напряжениями σ_{12}^\pm и соответствующими сдвиговыми деформациями γ_{12}^\pm в осях ортотропии x_1, x_2 ($a_0 = L/b$, $h_0 = L/h$; L, b – длина и ширина образца).

Диаграммы деформирования, приведенные для указанного выше композита (рис. 3, а), позволяют установить зависимости между секущими ($\hat{E}_x^\pm = \tan \hat{\varphi}^\pm$) и касательными ($\tilde{E}_x^\pm = \tan \tilde{\varphi}^\pm$) модулями упругости и осевыми деформациями $|\varepsilon_x^\pm|$. Они изображены для тест-образцов с указанными выше параметрами 1 и 2 (рис. 4, а и 4, б).

В соответствии с рис. 4 зависимости между σ_x^\pm и ε_x^\pm представим в виде

$$\sigma_x^\pm = \hat{E}_x^\pm (|\varepsilon_x^\pm|) \varepsilon_x^\pm, \quad (2)$$

а зависимости между приращениями $\Delta\sigma_x^\pm$ и $\Delta\varepsilon_x^\pm$ – в виде

$$\Delta\sigma_x^\pm = \tilde{E}_x^\pm (|\varepsilon_x^\pm|) \Delta\varepsilon_x^\pm. \quad (3)$$

При использовании уравнения (1) соотношение (2) преобразуем к виду

$$\sigma_{12}^\pm = \hat{G}_{12}^\pm (|\tilde{\gamma}_{12}^\pm|) \tilde{\gamma}_{12}^\pm, \quad (4)$$

где

$$\tilde{\gamma}_{12}^\pm = \frac{\gamma_{12}^\pm}{1 + \nu_{xy}^\pm}, \quad \hat{G}_{12}^\pm (|\tilde{\gamma}_{12}^\pm|) = \frac{\hat{E}_x^\pm (|\tilde{\gamma}_{12}^\pm|)}{2(1 + \nu_{xy}^\pm)}. \quad (5)$$

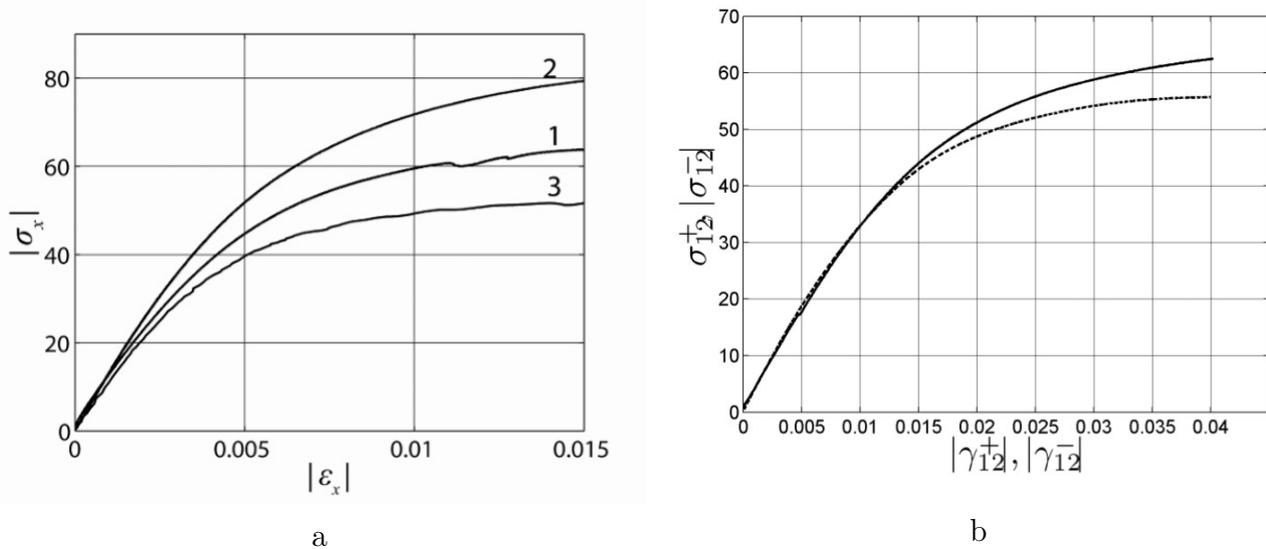


Рис. 3. Диаграммы деформирования (МПа): 1 – растяжение длинных образцов ($a_0 = 4.4$, $h_0 = 196$); 2 – сжатие коротких образцов ($a_0 = 1$, $h_0 = 5.7$); 3 – сжатие длинных образцов ($a_0 = 2.8$, $h_0 = 37$)

Fig. 3. Stress-strain diagrams (MPa): 1 – tension of long specimens ($a_0 = 4.4$, $h_0 = 196$); 2 – compression of short specimens ($a_0 = 1$, $h_0 = 5.7$); 3 – compression of long specimens ($a_0 = 2.8$, $h_0 = 37$)

Аналогичным образом вместо (3) можно получить соотношение

$$\Delta\sigma_{12}^{\pm} = \tilde{G}_{12}^{\pm} (|\tilde{\gamma}_{12}^{\pm}|) \Delta\gamma_{12}^{\pm}, \quad (6)$$

где

$$\tilde{G}_{12}^{\pm} (|\tilde{\gamma}_{12}^{\pm}|) = \frac{\tilde{E}_x^{\pm} (|\tilde{\gamma}_{12}^{\pm}|)}{2(1 + \nu_{xy}^{\pm})}. \quad (7)$$

Для рассматриваемого композита со структурой $[\pm 45^{\circ}]_{2s}$, изготовленного из препрега HSE 180 REM, построенные зависимости (6) и (7) приведены для тест-образцов 1 и 2 (рис. 5, а и 5, b).

Приведенные выше результаты свидетельствуют о том, что поведение тест-образца волокнистого композита со структурой $[\pm 45^{\circ}]_{2s}$ при сжатии достаточно сильно отличается от его поведения в условиях растяжения. Более надежными и достоверными следует считать результаты, соответствующие растяжению, так как они получены при использовании достаточно длинных образцов, обеспечивающих однородность формирующихся параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) как по ширине, так и по длине рабочей части образца.

Такую однородность параметров НДС не удастся обеспечить при испытаниях образцов на сжатие по существующим в настоящее время стандартам из-за малой рабочей длины испытываемых образцов. Отмеченное различие в результатах, в частности, обусловлено тем, что в слоях связующего материала, в которых формируется преимущественно сдвиговое НДС, а в волокнах и пучках волокон – преимущественно одноосное НДС растяжения или сжатия [27], как при нагружении, так и разгрузке конструкции происходят, как было установлено в [28], структурные изменения в композите частично из-за деградации связующего материала, а преимущественно из-за внутренних форм потери устойчивости волокон и пучков волокон на микро- и мезомасштабах [29–31].

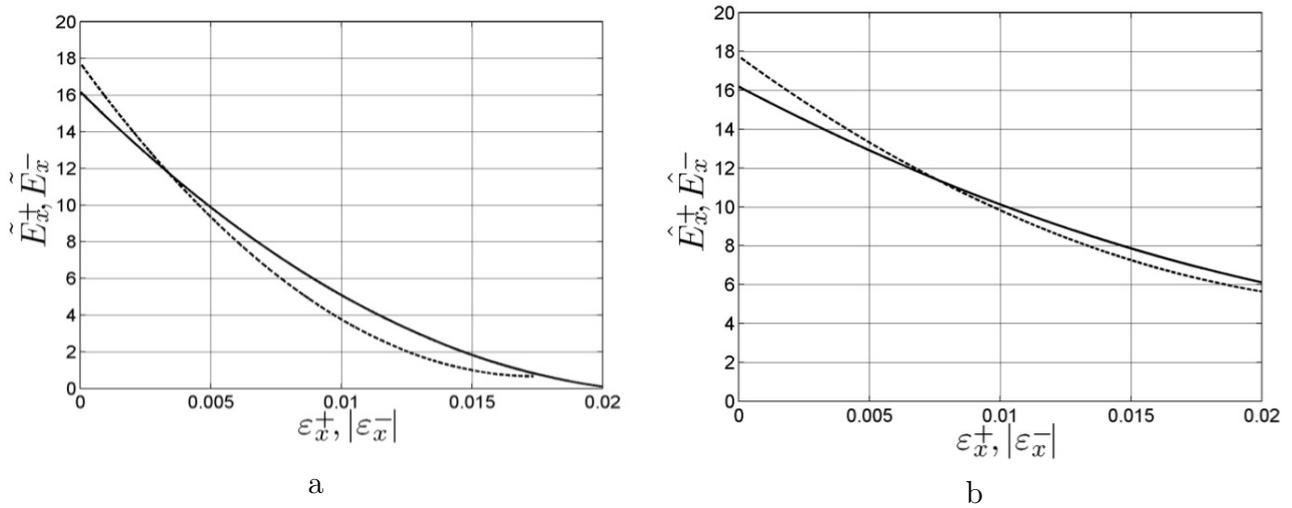


Рис. 4. Зависимости между секущими $\hat{E}_x^\pm = \hat{E}_x^\pm(|\varepsilon_x^\pm|)$ и касательными $\tilde{E}_x^\pm = \tilde{E}_x^\pm(|\varepsilon_x^\pm|)$ модулями упругости и осевыми деформациями образца (пунктирная линия – растяжение, сплошная линия – сжатие), ГПа

Fig. 4. Dependencies between secant $\hat{E}_x^\pm = \hat{E}_x^\pm(|\varepsilon_x^\pm|)$ and tangent $\tilde{E}_x^\pm = \tilde{E}_x^\pm(|\varepsilon_x^\pm|)$ moduli of elasticity and axial strain of the specimen (dashed line – under tension, solid line – under compression), GPa

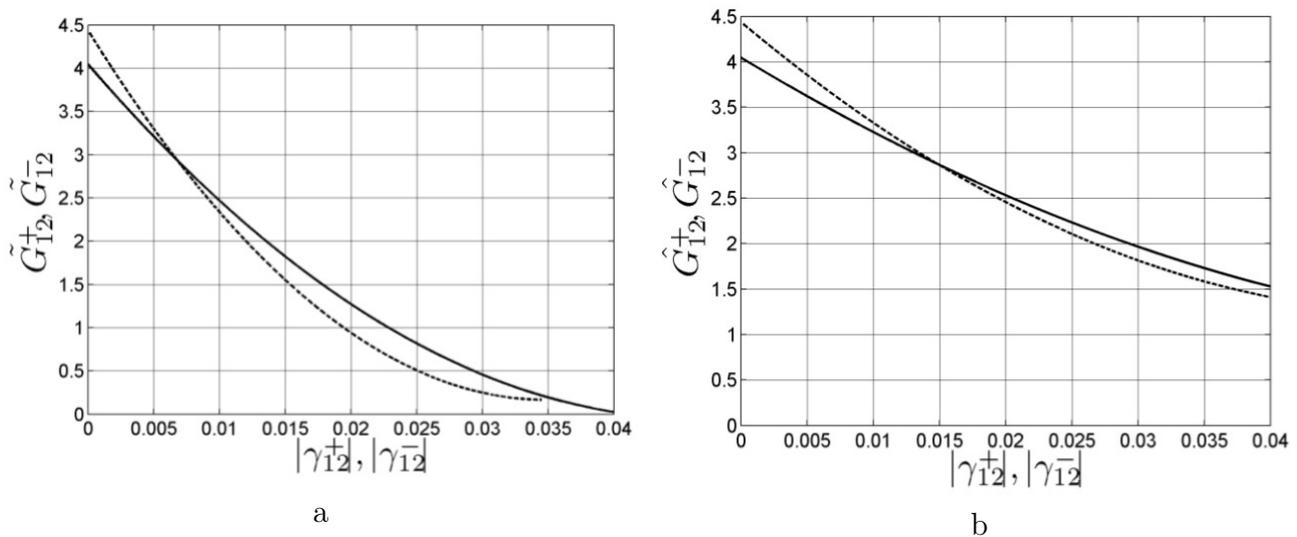


Рис. 5. Зависимости между секущими $\hat{G}_{12}^\pm = \hat{G}_{12}^\pm(|\gamma_{12}^\pm|)$ и касательными $\tilde{G}_{12}^\pm = \tilde{G}_{12}^\pm(|\gamma_{12}^\pm|)$ модулями сдвига и сдвиговыми деформациями (при растяжении – пунктирная линия, при сжатии – сплошная линия), ГПа

Fig. 5. Dependencies between secant $\hat{G}_{12}^\pm = \hat{G}_{12}^\pm(|\gamma_{12}^\pm|)$ and tangent $\tilde{G}_{12}^\pm = \tilde{G}_{12}^\pm(|\gamma_{12}^\pm|)$ shear moduli and shear strain of the specimen (dashed line – under tension, solid line – under compression), GPa

В связи с изложенным в дальнейшем при проведении расчетов будем использовать результаты, соответствующие растяжению образцов. Из рис. 5 видно, что на начальном участке нагружения при $\gamma_{12} = 0$ касательный модуль сдвига $\tilde{G}_{12}^+ = 4.2$ ГПа. Далее на участке до $\gamma_{12} = 0.017$ он резко убывает и достигает практически нулевого значения ($\tilde{G}_{12}^+ = 47$ МПа) при $\gamma_{12} = 0.044$. Рассмотрим на диаграмме $\tilde{G}_{12}^+ = \tilde{G}_{12}^+(\gamma_{12})$ точки

$(G_0, 0)$, (G_*, γ_*) и (G_p, γ_p) , имеющие координаты: $\tilde{G}_{12}^+ = G_0$, $\gamma_{12} = 0$, $\tilde{G}_{12}^+ = G_*$, $\gamma_{12} = \gamma_*$ и $\tilde{G}_{12}^+ = G_p$, $\gamma_{12} = \gamma_p$. В них величина G_* соответствует найденному в [25] предельному напряжению сжатия образца, численно равному осредненному модулю поперечного сдвига композита при потере устойчивости образца по чисто поперечно-сдвиговой форме (по этому значению G_* на диаграмме можно определить соответствующее значение сдвиговой деформации $\gamma_{12} = \gamma_*$), а значения G_p и γ_p являются на диаграмме экстремальными и соответствуют началу разрушения образца. В результате для аналитического представления функции $\tilde{G}_{12}^+ = \tilde{G}_{12}^+(\gamma_{12})$ допустимо использование аппроксимационной формулы

$$\tilde{G}_{12}^+ = G_0 + G^{(1)} |\gamma_{12}| + G^{(2)} \gamma_{12}^2, \quad (8)$$

где величины $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ определяются по формулам, приведенным в работе [24].

2. Решения задач о макро- и мезомасштабных формах потери устойчивости при сжатии тест-образца со структурой $[0^\circ]_s$ на основе уравнений простейшей уточненной теории типа С.П. Тимошенко

Рассмотрим стержень (тест-образец) из однонаправленного волокнистого композита со структурой $[0^\circ]_s$, для которого имеет место равенство

$$G_{13} = G_{12}(\gamma_{12}). \quad (9)$$

Стержень имеет прямоугольное поперечное сечение, толщину h , ширину b , длину L и подвержен осевому сжатию силой P . Задача о таком изгибе по уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко [32, 33] может быть описана следующими уравнениями

$$\begin{aligned} D\gamma'' - \hat{B}_{13}(w' + \gamma) &= 0, \\ \left[\hat{B}_{13}(w' + \gamma) \right]' - Pw'' &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где w – прогиб осевой линии; γ – угол поворота поперечного сечения $x = \text{const}$; $D = E_1 h^3 / 12$ – изгибная жесткость; $\hat{B}_{13} = k_c \hat{G}_{13} h$ – поперечная сдвиговая жесткость, в которой k_c – коэффициент поперечного сдвига; $\hat{G}_{13} = \hat{G}_{13}(\gamma_{13})$ – секущий модуль поперечного сдвига, определяемый (исходя из диаграммы вида рис. 3, а) в предположении $G_{13} = G_{12}$ при заданном значении P и достигнутом уровне деформации поперечного сдвига $\gamma_{13} = w' + \gamma$.

При возрастании внешней силы P , как было установлено в [34, 35], в окрестностях поперечных сечений стержня $x = 0$ и $x = L$ будут формироваться касательные напряжения $\sigma_{13}(x, z)$ и, как следствие, будут уменьшаться модули поперечного сдвига \hat{G}_{13} и \tilde{G}_{13} . С целью проведения качественного анализа предположим, что при некотором критическом значении нагрузки $P = P_{cr}$, наряду со сформированным напряженно-деформированным состоянием, возможно существование и смежного равновесного состояния, переход к которому осуществляется за счет приращений неизвестных функций Δw и $\Delta \gamma$ в рамках чисто упругой модели деформирования, когда в возмущенном состоянии для приращения функций имеет место зависимость

$$\Delta \sigma_{13} = 2\tilde{G}_{13} \Delta \varepsilon_{13} = \tilde{G}_{13} (\Delta w' + \Delta \gamma), \quad (11)$$

где \tilde{G}_{13} – касательный модуль поперечного сдвига в плоскости xz , который с целью упрощения будем считать постоянным по всей длине стержня.

Записав вместо уравнений равновесия (10) уравнения возмущенного равновесного состояния относительно функций $w^* = w + \Delta w$ и $\gamma^* = \gamma + \Delta\gamma$ и используя уравнения (10) невозмущенного состояния, получим

$$\begin{aligned} D\Delta\gamma'' - \tilde{B}_{13}(\Delta w' + \Delta\gamma) &= 0, \\ \tilde{B}_{13}(\Delta w'' + \Delta\gamma') - P_{cr}\Delta w'' &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где принято предположение, что жесткость $\tilde{B}_{13} = k_c \tilde{G}_{13} h$ является постоянной по всей длине образца и равна минимальной достигнутой жесткости в одном из поперечных сечений, указанных выше. Используя во втором уравнении системы (12) зависимость $\Delta w' = \frac{D}{\tilde{B}_{13}} \Delta\gamma'' - \Delta\gamma$, следующую из первого уравнения, получим уравнение

$$D \left(1 - \frac{P_{cr}}{\tilde{B}_{13}} \right) \Delta\gamma''' + P_{cr} \Delta\gamma' = 0. \quad (13)$$

Его первый интеграл

$$D \left(1 - \frac{P_{cr}}{\tilde{B}_{13}} \right) \Delta\gamma'' + P_{cr} \Delta\gamma = c_1, \quad (14)$$

где c_1 – постоянная интегрирования. При

$$P_{cr}^s = \tilde{B}_{13} = k_c \tilde{G}_{13} h \quad (15)$$

из (14) следует решение

$$\Delta\gamma = \frac{c_1}{P_{cr}^s}, \quad \Delta w' = -\Delta\gamma = -\frac{c_1}{P_{cr}^s}, \quad w = -\frac{c_1 x}{P_{cr}^s} + c_2$$

(c_2 – постоянная интегрирования), которое соответствует реализации чисто поперечно-сдвиговой формы потери устойчивости стержня. Такая ФПУ может реализоваться только у достаточно коротких стержней при значении $B_{13}^* = k_c \tilde{G}_{13}^* h$, где в соответствии с результатами исследований [1–9, 14–18] допустимо принять $\tilde{G}_{13}^* = \sigma_1^{-*}$.

Критические значения усилия P , соответствующие реализации других (изгибно-сдвиговых) ФПУ стержня, зависят от условия закрепления торцевых сечений.

2.1. Шарнирное опирание торцевых сечений. Решения для исследуемых ФПУ стержня при шарнирном опирании торцевых сечений имеют вид

$$\Delta w = w_n \sin \lambda_n x, \quad \Delta\gamma = \gamma_n \cos \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

При их подстановке в уравнения (12) из условия нетривиальности амплитудных значений w_n и γ_n придем к формуле

$$P_{cr} = \tilde{B}_{13} \left(1 - \frac{1}{1 + D\lambda_n^2/\tilde{B}_{13}} \right) = \frac{D\lambda_n^2}{1 + D\lambda_n^2/\tilde{B}_{13}}, \quad (17)$$

где жесткость, определяемая по формуле $\tilde{B}_{13} = k_c \tilde{G}_{13} h$, должна быть больше жесткости $B_{13}^* = k_c \tilde{G}_{13}^* h = k_c \sigma_1^{-*} h$, так как реализация изгибно-сдвиговой ФПУ стержня возможна только при его достаточно большой длине и при $\tilde{G}_{13} > \tilde{G}_{13}^{-*}$.

Из (17) следует, что при $\lambda_n \rightarrow \infty$ (то есть при $n \rightarrow \infty$) это решение стремится к решению (15), что, вообще говоря, не поддается какой-либо физической трактовке и, по-видимому, является особенностью решений рассматриваемой задачи в рамках простейшей используемой математической модели изучаемого процесса.

В формуле (17) слагаемое $\frac{1}{1 + D\lambda_n^2/\tilde{B}_{13}}$ достигает максимума при волновом числе $n = 1$. При таком значении n величина P_{cr} является минимальной, и ей всегда соответствует изгибно-сдвиговая ФПУ, описываемая функциями (16).

2.2. Защемление торцевых сечений. Введя безразмерную независимую переменную $\eta = x/L$, функцию перемещений Φ в соответствии с зависимостями

$$\Delta\gamma = -\Phi', \quad \Delta w = \Phi - \frac{D}{\tilde{B}_{13}}\Phi''$$

и параметр усилия $m = PL^2/D$, вместо системы уравнений (12) получим разрешающее уравнение

$$\frac{d^4\Phi}{d\eta^4} + k^2\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} = 0, \quad (18)$$

где введены обозначения

$$h_0 = \frac{h}{L}, \quad k^2 = \frac{m}{1 - mr}, \quad r = \frac{E_1 h_0^2}{12G_{13}k_c}. \quad (19)$$

Записав решение уравнения (18) в виде

$$\Phi = c_1 + c_2\eta + c_3 \sin k\eta + c_4 \cos k\eta,$$

найдем решение уравнений (12) (здесь и в дальнейшем для краткости – без символов приращений Δ)

$$\gamma = -c_2 - c_3 k \cos k\eta + c_4 k \sin k\eta, \quad (20)$$

$$w = c_1 + c_2\eta + c_3 (1 + rk^2) \sin k\eta + c_4 (1 + rk^2) \cos k\eta. \quad (21)$$

Если подчинить решение (20) условиям $\gamma'(0) = \gamma'(1) = 0$, имеющим место при шарнирном опирании торцевых сечений, то $c_3 = 0$, а из условия $c_4 \neq 0$ найдем решение $k = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$, соответствующее формуле (17).

При подчинении решений (20) и (21) условиям защемления

$$\tilde{w}(0) = \tilde{w}(1) = \gamma(0) = \gamma(1) = 0$$

придем к системе алгебраических уравнений

$$c_2 + kc_3 = 0, \quad c_2 + k(c_3 \cos k - c_4 \sin k) = 0,$$

$$c_1 + (1 + rk^2)c_4 = 0, \quad c_1 + c_2 + (1 + rk^2)(c_3 \sin k + c_4 \cos k) = 0,$$

из условия нетривиальности решений которой получим характеристическое уравнение

$$\frac{k}{1 + k^2r} \sin k - 2(1 - \cos k) = 0.$$

Корни этого уравнения при различных значениях параметра r приведены в табл. 1.

Табл. 1. Корни характеристического уравнения при различных r
Table 1. Roots of the characteristic equation for various values of r

r	номер положительного корня				
	1	2	3	4	5
0.01	2π	2.7555π	4π	4.7403π	6π
0.1	2π	2.3323π	4π	4.2183π	6π
0.2	2π	2.2014π	4π	4.1181π	6π
0.3	2π	2.1442π	4π	4.0807π	6π
0.4	2π	2.1123π	4π	4.0612π	6π
0.5	2π	2.0919π	4π	4.0493π	6π

Видим, что в случае защемления торцевых сечений при всех значениях r минимальному значению P_{cr} соответствует корень $k = 2\pi$, в то время как при шарнирном закреплении торцевых сечений $k = \pi$. Следовательно, в обоих случаях для определения m и P_{cr} получим формулы

$$m = \frac{k^2}{1 + rk^2}, \quad P_{cr} = \frac{Dm}{L^2}. \quad (22)$$

Примем $k_c = 5/6$. При фиксированных геометрических и жесткостных характеристиках тест-образца $L = 25$ мм, $h = 4$ мм, $E_1 = 130$ ГПа по формуле (17) были проведены расчеты критического напряжения $\sigma_{cr} = P_{cr}/h$ при варьировании значений \tilde{G}_{13} и числа полуволн потери устойчивости. Полученные результаты представлены (рис. 6, а) в виде зависимостей $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$, а их фрагменты показаны в другом масштабе при $\tilde{G}_{13} < 1$ ГПа (рис. 6, б). Видим, что при всех значениях \tilde{G}_{13} минимальным значениям σ_{cr} соответствует волновое число $n = 1$, а по мере уменьшения \tilde{G}_{13} (рис. 6, б) наблюдается значительное сближение значений σ_{cr} при увеличении значения n . Следовательно, предельное значение сжимающего напряжения $\sigma = \sigma^*$, при достижении которого в экспериментах наблюдается разрушение образца, вполне допустимо принять за критическое напряжение $\sigma_{cr} = \sigma_1^{-*} = G_*$, соответствующее реализации чисто поперечно-сдвиговой ФПУ в силу его близости к значению σ_{cr} , соответствующему реализации изгибно-сдвиговой ФПУ при $n = 1$ и $\tilde{G}_{13} = G_*$. Заметим также, что по мере уменьшения \tilde{G}_{13} и увеличения n (рис. 6) наблюдается значительное сближение определяемых значений σ_{cr} , а при $\tilde{G}_{13} = G_*$ определяемые значения σ_{cr} можно считать практически совпадающими как при шарнирном опирании, так и при защемлении торцевых сечений стержня.

Важно отметить, что в процессе нагружения стержня во всех уравнениях (10), (12)–(14), соотношении (11) и формулах (15), (17) входящие модули поперечного сдвига должны равняться модулю G_0 при γ_{12} , входящему в аппроксимационную формулу (8). Поэтому для реализации чисто поперечно-сдвиговой ФПУ, возможной только при малых значениях \tilde{G}_{13} , нужно использовать более сложные и содержательные модели деформирования [34, 35]. В реальных экспериментах сложное докритическое напряженное состояние в образцах с компонентами $\sigma_{11}^0 \neq 0$, $\sigma_{13}^0 \neq 0$, $\sigma_{33}^0 \neq 0$ формируется только в зонах их закрепления в захватах (рис. 2) и на достаточно коротких участках рабочей длины L . При этом задача о нагружении стержня осевой силой P , сформулированная на основе уравнений (10) при заданных граничных условиях, накладываемых на функции w и γ , становится существенно нелинейной в силу наблюдаемой в экспериментах существенной

физически нелинейной зависимости $\hat{G}_{12} = \hat{G}_{12}(\gamma_{12})$ лишь в окрестности захватов приспособлений, используемых для экспериментов. Результаты качественного характера теоретических исследований этих вопросов, касающиеся формирования сложного докритического НДС в окрестности захватов приспособления, изложены, в частности, в работах [34, 35]. В связи с этим укажем, что при такой более содержательной постановке рассматриваемой задачи на каждом уровне нагружения при решении линеаризованной задачи на основе уравнений (12) требуется предварительное определение величины \tilde{G}_{13} в каждом сечении стержня по накопленному значению γ_{13} с использованием аппроксимационной формулы (8). Такая постановка и численное решение геометрически и физически нелинейной задачи по выявлению поперечно-сдвиговой формы потери устойчивости в условиях трехточечного изгиба тест-образца из волокнистого композита даны в работе [24], где приведены также результаты проведенных экспериментов.

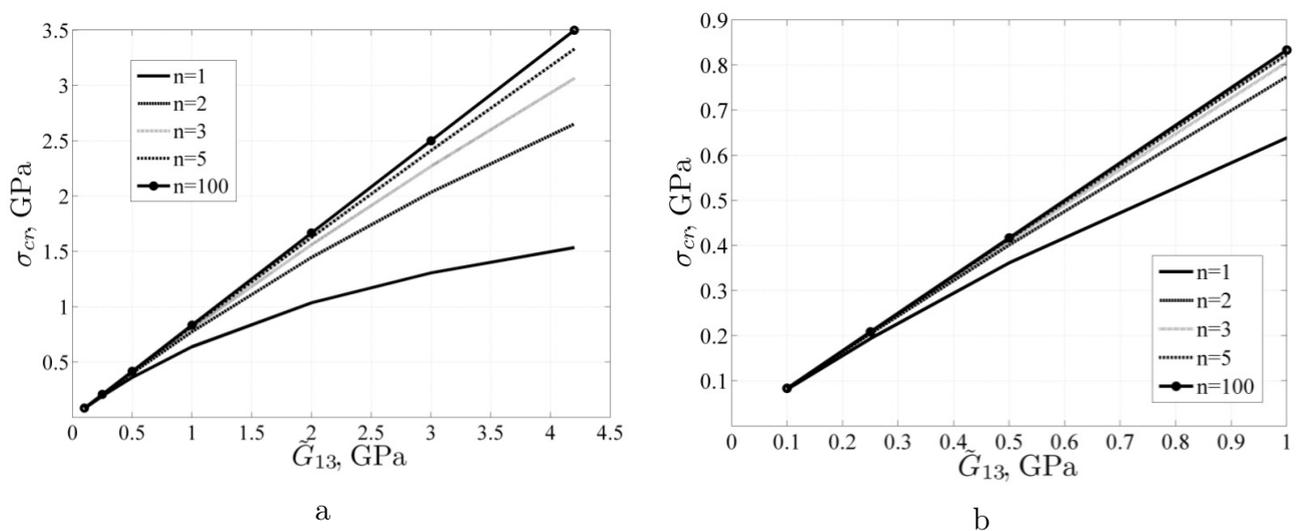


Рис. 6. Зависимости $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ при различных значениях n

Fig. 6. Dependencies $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ for different values of n

2.3. Мезомасштабные ФПУ периферийного слоя композита. Если тест-образец со структурой $[0^\circ]_s$ изготовлен из s монослоев волокнистого композита, каждый из которых имеет толщину t , а между слоями расположены слои связующего материала толщиной t_0 , то при его сжатии (рис. 7) возможна реализация также и мезомасштабных ФПУ периферийных слоев.

В соответствии с рис. 7 и результатами работ [22, 23] для исследования таких ФПУ могут быть использованы уравнения докритического и возмущенного равновесных состояний, записанные в приближении

$$D\gamma'' - \hat{B}_{13}(w' + \gamma) = 0, \quad \left[\hat{B}_{13}(w' + \gamma) \right]' - Pw'' - \frac{E_3^0}{t_0}w = 0, \quad (23)$$

$$D\Delta\gamma'' - \tilde{B}_{13}(\Delta w' + \Delta\gamma) = 0, \quad \left[\tilde{B}_{13}(\Delta w' + \Delta\gamma) \right]' - P\Delta w'' - \frac{E_3^0}{t_0}\Delta w = 0. \quad (24)$$

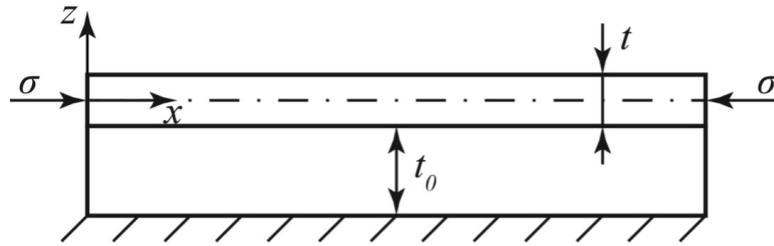


Рис. 7. Расчетная схема для постановки задачи о мезомасштабных ФПУ периферийного слоя композита

Fig. 7. Computational diagram for formulating the problem of mesoscale buckling modes in the peripheral composite layer

В уравнениях (23) и (24) для вычисления изгибных и поперечно-сдвиговых жесткостных коэффициентов в рассматриваемом случае необходимо использовать формулы

$$D = \frac{E_1 t^3}{12}, \quad \hat{B}_{13} = k_c \hat{G}_{13} t, \quad \tilde{B}_{13} = k_c \tilde{G}_{13} t, \quad (25)$$

где E_3^0 обозначает модуль упругости слоя связующего материала в направлении толщины.

Если считать, что \tilde{B}_{13} имеет постоянное значение по длине монослоя, то при подстановке функций (16) из условия нетривиальности решений уравнений (24) придем к формуле

$$P_{cr} = \frac{D \lambda_n^2}{1 + D \lambda_n^2 / \tilde{B}_{13}} + \frac{E_3^0}{t_0 \lambda_n^2} = \tilde{B}_{13} \left(1 - \frac{1}{1 + D \lambda_n^2 / \tilde{B}_{13}} \right) + \frac{E_3^0}{t_0 \lambda_n^2}, \quad (26)$$

из которой при $\lambda_n \rightarrow \infty$ по-прежнему следует формула

$$\sigma_{cr} = P_{cr} / t = \tilde{G}_{13}^*. \quad (27)$$

Найденное решение в виде (27) подтверждается и результатами расчетов, проведенных с использованием формулы (26) при указанных выше характеристиках композита, заданных значениях толщин $t = 0.15$ мм, $t_0 = 0.1$ мм и варьировании значений n и E_3^0 . Результаты, полученные при $E_3^0 = 50$ МПа, представлены на рис. 8 (а) в виде зависимости $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(n)$, а результаты, соответствующие $n \rightarrow \infty$ и полученные при различных значениях E_3^0 , изображены на рис. 8 (б) в виде зависимостей $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$.

Полученные результаты показывают, что реализация исследуемых мезомасштабных ФПУ возможна как при ослабленных ($E_3^0 = 0.5$ ГПа), так и неослабленных ($E_3^0 = 2$ ГПа) характеристиках слоя связующего материала, расположенного между периферийным и внутренним монослоями композита. Судя по приведенным кривым (рис. 8, б), значения E_3^0 не столь значительно влияют на определяемую величину $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$.

3. Решения задач о макромасштабных ФПУ при сжатии тест-образца со структурой $[0^\circ]_s$ на основе уточненных уравнений, имеющих высокую степень точности

В данном разделе на основе уравнений, построенных в работах [34, 36] и имеющих более высокую степень точности в сравнении с использованными выше, рассмотрим линеаризованную задачу о возможных чисто сдвиговых и изгибно-сдвиговых формах потери

устойчивости волокнистого композитного стержня при сжатии. Заметим, что их реализация может привести к первому, второму и пятому видам разрушения образцов при сжатии, показанным на рис. 1. Приведенные ниже результаты следует также рассматривать как анализ качества и содержательности математических моделей, предложенных в статьях [34, 36] и предназначенных для уточненного исследования механики деформирования волокнистого композита на полимерной основе.

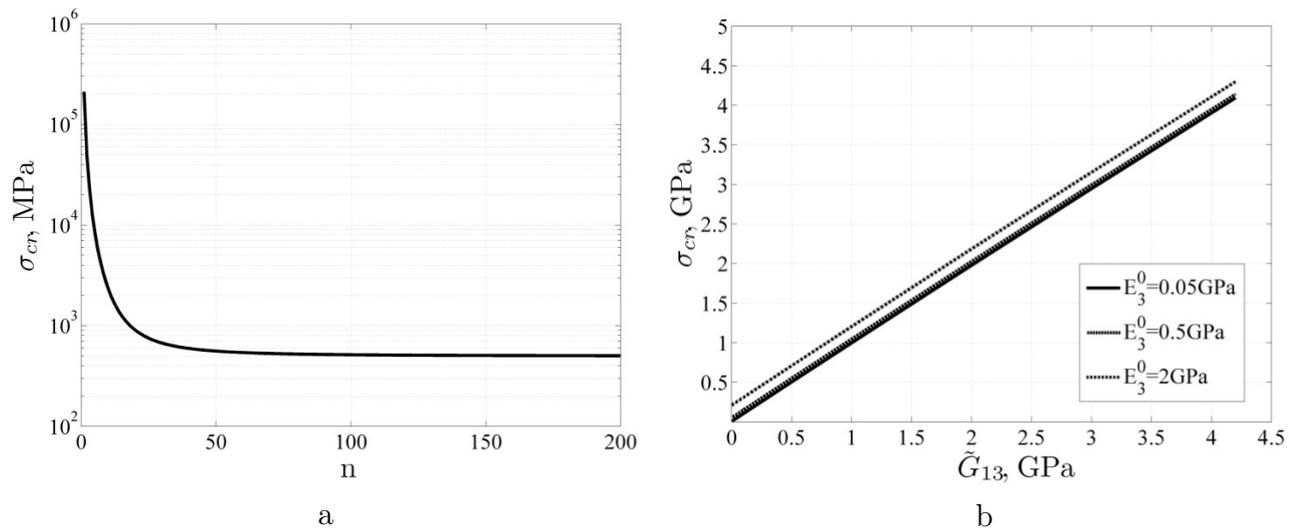


Рис. 8. а) Зависимость $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(n)$, соответствующая мезомасштабной ФПУ при $E_3^0 = 50$ МПа, $\tilde{G}_{13} = 500$ МПа.
 б) Зависимость $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$, соответствующая мезомасштабной ФПУ при $n = 200$
Fig. 8. а) Dependency $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(n)$ corresponding to mesoscale buckling mode at $E_3^0 = 50$ МПа, $\tilde{G}_{13} = 500$ МПа.
 б) Dependency $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ corresponding to mesoscale buckling mode at $n = 200$

Предположим, что в пластине в общем случае сформировано начальное напряженное состояние, характеризующееся усилиями

$$P = T_{11}^0 = -h\sigma_{11}^0, \quad T_{33}^0 = -h\sigma_{33}^0 \tag{28}$$

и имеющее место на участках крепления тест-образцов в приспособлениях для испытаний на сжатие (рис. 2). Для постановки задач устойчивости в условиях докритического напряженного состояния (28) обратимся к уточненным уравнениям, построенным в работе [35] в двух вариантах.

3.1. Решение на основе первого варианта уравнений. Здесь при рассматриваемом виде нагружения стержня для поперечного касательного напряжения σ_{13} и перемещений U_3, U_1 имеют место представления

$$\sigma_{13} = \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \tau_1, \quad U_3 = w + z\varphi, \tag{29}$$

$$U_1 = u_1 - z[(1 + \varphi)w_{,1} - \hat{\tau}_1] - \frac{z^2}{2}(1 + \varphi)\varphi_{,1} - \frac{4z^3}{3h^2}\hat{\tau}_1, \quad \hat{\tau}_1 = \frac{\tau_1}{\hat{G}_{13}}.$$

Уравнения, линеаризованные в окрестности напряженного состояния (28), основанные на (29) [36] и составленные с учетом знаков усилий (28), в рассматриваемом случае разделяются на две системы. Одна из них имеет вид

$$\begin{aligned} f_w &= \left[M_{11,1} - T_{11}^0 w_{,1} - T_{33}^0 \left(w_{,1} - \frac{\tau_1}{\tilde{G}_{13}} \right) \right]_{,1} = 0, \\ f_\tau &= N_{11,1} - M_{11,1} + T_{13} + T_{33}^0 \left(w_{,1} - \frac{\tau_1}{\tilde{G}_{13}} \right) = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$M_{11} = -D \left(w_{,11} - \frac{4}{5\tilde{G}_{13}} \tau_{1,1} \right), \quad N_{11} = -\frac{D}{5} \left(w_{,11} - \frac{16}{21\tilde{G}_{13}} \tau_{1,1} \right), \quad T_{13} = \frac{8t}{15} \tau_1. \quad (31)$$

Используем соотношения (31) в уравнениях (30) и будем искать решения в виде

$$w = \tilde{w} \sin \lambda_n x, \quad \tau_1 = \tau \cos \lambda_n x,$$

что позволит при условии $\tilde{w} \neq 0$, $\tau \neq 0$ прийти к характеристическому уравнению следующего вида

$$t_{11}^0 t_{33}^0 - r_{11} t_{11}^0 - r_{33} t_{33}^0 + r_0 = 0. \quad (32)$$

Здесь введены обозначения

$$t_{11}^0 = \frac{T_{11}^0}{D}, \quad t_{33}^0 = \frac{T_{33}^0}{D}, \quad (33)$$

$$r_{11} = \frac{8t\tilde{G}_{13}}{15D} + \frac{68\lambda_n^2}{105}, \quad r_{33} = \frac{8t\tilde{G}_{13}}{15D} + \frac{\lambda_n^2}{21}, \quad r_0 = \frac{4\lambda_n^2}{15} \left(\frac{\lambda_n^2}{35} + \frac{2t\tilde{G}_{13}}{D} \right). \quad (34)$$

Из уравнения (32) следует, что в силу $r_{11} > 0$, $r_{33} > 0$, $r_0 > 0$ при $\sigma_{33}^0 = 0$, когда $\sigma_{11}^0 \neq 0$, и при $\sigma_{11}^0 = 0$, когда $\sigma_{33}^0 \neq 0$, критические значения напряжений будут равны

$$t_{11}^* = \frac{r_0}{r_{11}}, \quad t_{33}^* = \frac{r_0}{r_{33}}. \quad (35)$$

А при $\sigma_{33}^0 = \kappa \sigma_{11}^0$ для определения t_{11}^* при заданном $\kappa \neq 0$ придем к уравнению

$$\left(t_{11}^0 \right)^2 - \frac{r_{11} + \kappa r_{33}}{\kappa} t_{11}^0 + \frac{r_0}{\kappa} = 0, \quad (36)$$

имеющему корни

$$t_{11(1,2)}^* = \frac{1}{2\kappa} \left(r_{11} + \kappa r_{33} \pm \sqrt{(r_{11} + \kappa r_{33})^2 - 4\kappa r_0} \right). \quad (37)$$

При принятых выше фиксированных геометрических и жесткостных характеристиках тест-образца ($L = 25$ мм, $h = 4$ мм, $E_1 = 130$ ГПа) по формуле (17) были проведены расчеты по определению критического напряжения $\sigma_{cr} = P_{cr}/h$ при варьировании значений \tilde{G}_{13} и числа n полуволн потери устойчивости. На рис. 9 представлены зависимости $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$, найденные на основе уравнений (30): при различных значениях n и $\kappa = 1$ (рис. 9, а), при различных значениях κ и $n = 1$ (рис. 9, б). Видим, что минимальным

значениям $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ соответствует изгибно-сдвиговая ФПУ с параметром волнообразования $n = 1$. По мере увеличения параметров n и \tilde{G}_{13} наблюдается существенное увеличение величины σ_{cr} (рис. 9, а), а при малых значениях модуля сдвига наличие поперечных напряжений $\sigma_{33}^0 = \kappa\sigma_{11}^0$ (при $\kappa = 0.5, \kappa = 1$) не сказывается на величине σ_{cr} (рис. 9, б). Однако при больших значениях \tilde{G}_{13} формирование напряжения σ_{33}^0 наряду с напряжением σ_{11}^0 вносит существенный вклад в реализацию изгибно-сдвиговой ФПУ в сторону уменьшения критического значения σ_{cr} .

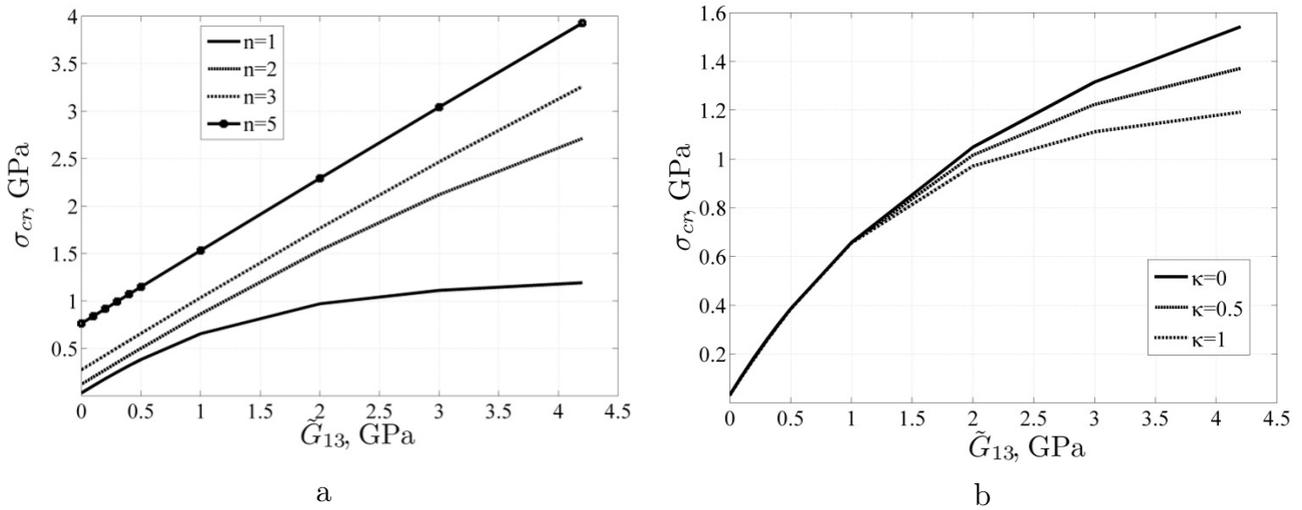


Рис. 9. Зависимости $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$, найденные на основе уравнений (30) при различных значениях κ и n

Fig. 9. Dependencies $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ based on equations (30) for different values of κ and n

3.2. Решения на основе второго варианта уравнений. Второй вариант уравнений, построенных в работе [34], основан на представлениях перемещений U_3 и U_1 функциями

$$U_3 = w + z\varphi, \quad U_1 = u_1 - z\gamma_1 - \frac{z^2}{2}\psi_1 - \frac{4z^3}{3h^2}\chi_1, \tag{38}$$

в которых неизвестными являются одномерные функции $w, \varphi, u_1, \gamma_1, \psi_1$ и χ_1 .

Уравнения, соответствующие (38) [36] и линеаризованные в окрестности напряженного состояния (28), имеют вид

$$f_w = \left(\tilde{B}_{13} - T_{11}^0\right) w_{,11} - \tilde{B}_{13} \left(\gamma_{1,1} + \frac{1}{3}\chi_{1,1}\right) = 0, \tag{39}$$

$$f_\gamma = \gamma_{1,11} + \frac{1}{5}\chi_{1,11} + \frac{\tilde{B}_{13}}{D} \left(w_{,1} - \frac{1}{3}\chi_1\right) + \frac{\left(T_{33}^0 - \tilde{B}_{13}\right)}{D}\gamma_1 = 0, \tag{40}$$

$$f_\chi = \gamma_{1,11} + \frac{5}{21}\chi_{1,11} + \frac{\tilde{B}_{13}}{D} \left[\frac{5}{3}(w_{,1} - \gamma_1) - \chi_1\right] = 0. \tag{41}$$

Из них у уравнения (39), содержащего при критическом значении

$$T_{11}^* = \tilde{B}_{13} \tag{42}$$

вырождающееся первое слагаемое, имеется решение

$$\gamma_1 + \frac{\chi_1}{3} = \text{const},$$

соответствующее потере устойчивости по чисто поперечно-сдвиговой ФПУ в условиях продольного сжатия напряжением $\sigma_{11}^0 = T_{11}^0/h$, когда $\sigma_{33}^0 = 0$.

В предположениях $\sigma_{11}^0 = 0$ и $\sigma_{33}^0 \neq 0$ из уравнений (40) и (41) получим критическое значение

$$T_{33}^* = \frac{4}{9} \tilde{B}_{13} = \frac{4h\tilde{G}_{13}}{9}, \quad (43)$$

соответствующее существованию решения $\gamma_1 = \text{const}$, $\chi_1 = -\frac{5\gamma_1}{3} = \text{const}$ с нулевой изменяемостью функций γ_1 и χ_1 вдоль оси x . Оно оказалось более чем в два раза меньше значения $T_{33}^* = h\tilde{G}_{13}$, установленного ранее при использовании менее содержательных по точности уравнений по сдвиговой модели С.П. Тимошенко.

Другие решения уравнений (39)–(41) будем искать в виде

$$w = \tilde{w} \sin \lambda_n x, \quad \gamma_1 = \tilde{\gamma}_1 \cos \lambda_n x, \quad \chi_1 = \tilde{\chi}_1 \cos \lambda_n x.$$

При их подстановке в (40) и (41) придем к зависимости

$$\tilde{\chi}_1 = 3\lambda_n \left(1 - \frac{T_{11}^0}{\tilde{B}_{13}} \right) \tilde{w} - 3\tilde{\gamma}_1,$$

а при ее использовании – к системе двух однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \left(a_{11} + 3\lambda_n a_{32} \frac{T_{11}^0}{\tilde{B}_{13}} \right) \tilde{w} - \left(\frac{2\lambda_n^2}{5} - \frac{T_{33}^0}{D} \right) \tilde{\gamma}_1 &= 0, \\ - \left(a_{21} - 3\lambda_n a_{33} \frac{T_{11}^0}{\tilde{B}_{13}} \right) \tilde{w} + a_{22} \tilde{\gamma}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{3\lambda_n^3}{5}, & a_{32} &= \frac{\lambda_n^2}{5} + \frac{\tilde{B}_{13}}{3D}, & a_{21} &= \frac{4\lambda_n \tilde{B}_{13}}{3D} + \frac{5\lambda_n^3}{7}, \\ a_{22} &= \frac{4\tilde{B}_{13}}{3D} - \frac{2\lambda_n^2}{7}, & a_{33} &= \frac{5\lambda_n^2}{21} + \frac{\tilde{B}_{13}}{D}. \end{aligned} \quad (45)$$

Из условия нетривиальности решений системы алгебраических уравнений (44) в рассматриваемом случае при учете (45) придем к характеристическому уравнению

$$3a_{33}\lambda_n \frac{T_{11}^0 T_{33}^0}{\tilde{B}_{13} D} - \left(3\lambda_n a_{22} a_{32} + \frac{6\lambda_n^3 a_{33}}{5} \right) \frac{T_{11}^0}{\tilde{B}_{13}} - a_{21} \frac{T_{33}^0}{D} + 4\lambda_n^3 \left(\frac{\lambda_n^2}{35} + \frac{\tilde{B}_{13}}{3D} \right) = 0. \quad (46)$$

При введении параметров (35) и связи $t_{33}^0 = \kappa t_{11}^0$ уравнение (46) трансформируем в уравнение (36) с корнями (37), в которых в рассматриваемом случае

$$r_0 = \frac{4\lambda_n^2 \tilde{B}_{13}}{3a_{33} D} \left(\frac{\lambda_n^2}{35} + \frac{\tilde{B}_{13}}{3D} \right), \quad r_{11} = \frac{2\lambda_n^2}{5} + \frac{a_{22} a_{32}}{a_{33}}, \quad r_{33} = \frac{a_{21} \tilde{B}_{13}}{3D a_{33} \lambda_n}. \quad (47)$$

При тех же исходных данных, что и принятых выше, с использованием формул (47) были проведены расчеты критического напряжения $\sigma_{cr} = P_{cr}/h$ при варьировании значений \tilde{G}_{13} и числа n полуволин потери устойчивости. На рис. 10 представлены зависимости $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$, найденные на основе уравнений (39)–(41): при различных значениях n и $\kappa = 1$ (рис. 10, а), при различных значениях κ и $n = 1$ (рис. 10, б). Видно, что результаты, полученные на основе уравнений первого и второго вариантов теории, принципиально различаются лишь при $n \rightarrow \infty$ и малых значениях \tilde{G}_{13} . Второй вариант теории при $\tilde{G}_{13} \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$ приводит к значениям $\sigma_{cr} \rightarrow 0$ (рис. 10, а), в то время как первый вариант – к конечному значению $\sigma_{cr} \neq 0$.

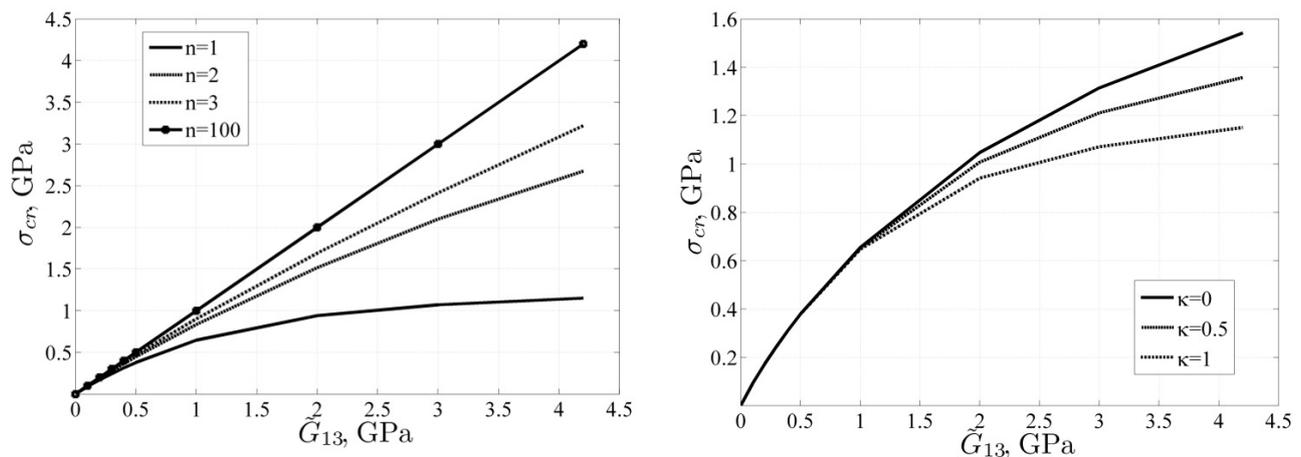


Рис. 10. Зависимости $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$, найденные на основе уравнений (39)–(41) при различных значениях κ и n

Fig. 10. Dependencies $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ based on equations (39)–(41) for different values of κ and n

На рис. 11 представлены зависимости $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$, найденные на основе формулы (17) (модель Тимошенко при $k_c = 5/6$), уравнения (30) (первый уточненный вариант), уравнений (39)–(41) (второй уточненный вариант) при $\kappa = 0$ и $n = 1$, что соответствует реализации изгибно-сдвиговой ФПУ с минимальным значением σ_{cr} при различных значениях \tilde{G}_{13} . Установлено практически полное совпадение результатов, полученных на основе трех использованных вариантов теории. Однако оно имеет место только для тест-образцов средней и малой относительных толщин $h_0 = h/L$ и при коэффициенте поперечного сдвига $k_c = 5/6$ (в формуле $\tilde{B}_{13} = k_c \tilde{G}_{13} h$), входящего в соотношения упругости по теории типа Тимошенко.

4. Результаты испытаний тест-образцов из композитов ЭЛУР-П и HSE 180 REM со структурами $[0^\circ]_{30}$ на сжатие. Обратная задача определения касательного модуля поперечного сдвига

Для определения физико-механических характеристик волокнистых композитов на сжатие согласно методике [26] также были изготовлены образцы со структурой $[0^\circ]_{30}$ из углеродной ЭЛУР-П на полимерной основе. Они имели среднюю толщину $h = 4.1$ мм, длину рабочей части $L = 25$ мм и ширину $b = 9.8$ мм. Их испытания проводились с использованием специального приспособления, конструкция которого приведена в существующих стандартах испытаний.

Диаграммы деформирования, полученные для определения E_1^- , частично приведены на рис. 12 (а), а на рис. 12 (б) представлены диаграммы, полученные для определения предела прочности σ_1^{-*} .

Результаты проведенных испытаний сведены в табл. 2.

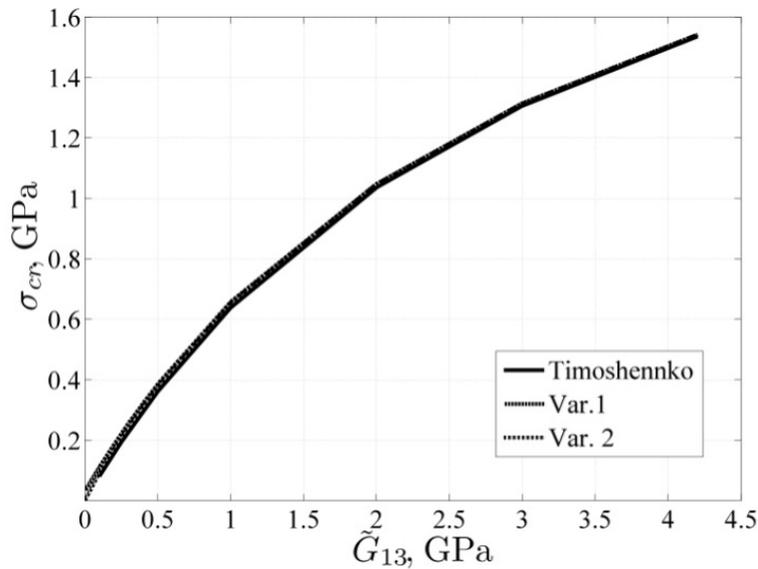


Рис. 11. Зависимости $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$, найденные на основе трех вариантов уравнений при значениях $n = 1$ и $\kappa = 0$

Fig. 11. Dependencies $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ based on three variants of equations for $n = 1$ and $\kappa = 0$

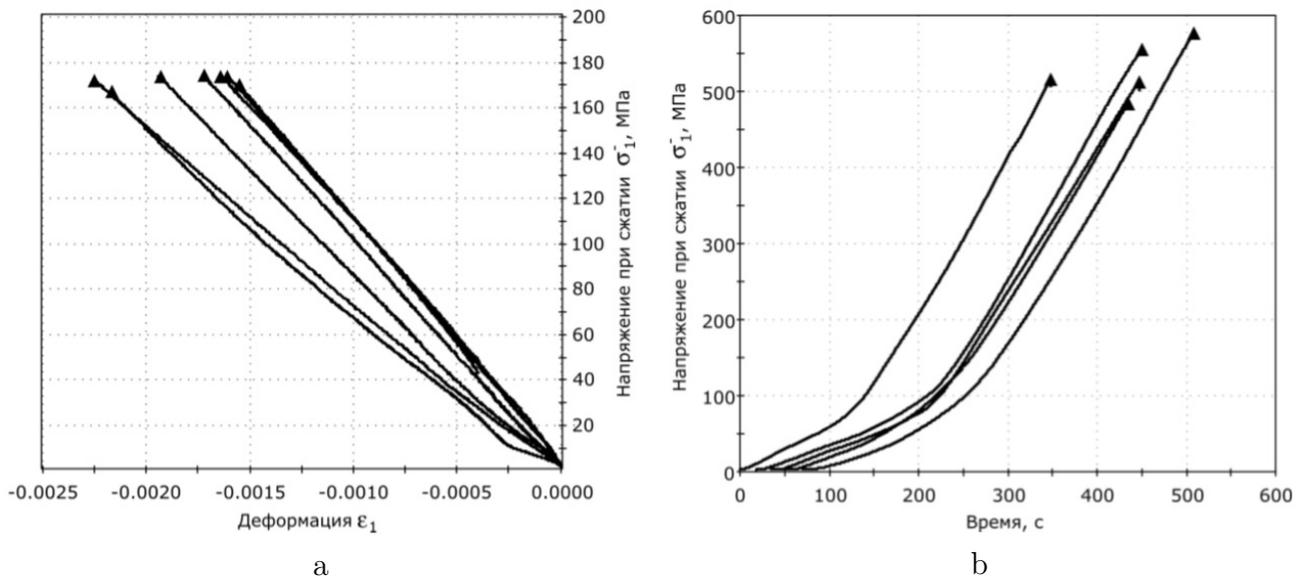


Рис. 12. а) Диаграммы деформирования для определения E_1^- .

б) Диаграммы деформирования для определения σ_1^{-*}

Fig. 12. а) Stress-strain diagrams to calculate E_1^- .

б) Stress-strain diagrams to calculate σ_1^{-*}

Среднее значение σ_1^{-*} равно $\sigma_1^{-*} = 529.3$ МПа, что в 1.38 раза меньше найденного в [26] предела прочности на растяжение σ_1^{+*} . Среднее значение модуля упругости $E_1^+ = 104.7$ ГПа, определенного при растяжении, оказалось в 1.09 раза больше модуля упругости $E_1^- = 96.3$ ГПа, определенного при сжатии.

Некоторые результаты экспериментальных исследований, проведенных на тест-образцах, изготовленных из препрега HSE 180 REM, приведены в табл. 3 ($h = 4.1$ мм, $L = 25$ мм) и 4 ($h = 8.8$ мм, $L = 20$ мм).

Табл. 2. Результаты испытаний тест-образцов из композитов ЭЛУР-П

Table 2. Test results for the ELUR-P composite specimens

Номер образца	b (мм)	h (мм)	E_1^- (ГПа)	bP^* (кН)	σ_1^{-*} (МПа)	\tilde{G}_{13} при $k = \pi$ (МПа)	\tilde{G}_{13} при $k = 2\pi$ (МПа)
1	9.7	3.8	107.4	18.84	516.3	836.7 (697.2)	662.5 (552.1)
2	9.8	4.1	93.3	22.46	555.7	906.1 (755.1)	714.0 (595.0)
3	9.8	4.1	99.7	20.76	513.2	801.5 (667.9)	653.7 (544.8)

Табл. 3. Результаты испытаний тест-образцов HSE 180 REM ($h = 4.1$ мм, $L = 25$ мм)

Table 3. Test results for the HSE 180 REM composite specimens ($h = 4.1$ mm, $L = 25$ mm)

Номер образца	b (мм)	h (мм)	E_1^- (ГПа)	bP^* (кН)	σ_1^{-*} (МПа)	\tilde{G}_{13} при $k = \pi$ (МПа)	\tilde{G}_{13} при $k = 2\pi$ (МПа)
1	10.0	4.1	107.2	28.71	702.42	1197.9 (998.2)	910.3 (758.6)
2	10.2	4.2	121.5	35.31	835.84	1440.4 (1200.3)	1085.4 (904.5)
3	10.0	4.1	116.6	29.76	724.49	1204.5 (1003.8)	934.4 (778.7)
4	10.0	4.1	110.0	34.59	843.80	1542.4 (1285.3)	1107.7 (923.1)
5	10.0	4.2	108.5	38.64	929.16	1791.9 (1493.2)	1231.3 (1026.1)
6	10.0	4.2	114.6	31.71	762.31	1292.1 (1076.7)	986.8 (822.3)
Среднее	10.0	4.1	112.7	33.12	799.67		

Табл. 4. Результаты испытаний тест-образцов HSE 180 REM ($h = 8.8$ мм, $L = 20$ мм)

Table 4. Test results for the HSE 180 REM composite specimens ($h = 8.8$ mm, $L = 20$ mm)

Номер образца	b (мм)	h (мм)	E_1^- (ГПа)	bP^* (кН)	σ_1^{-*} (МПа)	\tilde{G}_{13} при $k = \pi$ (МПа)	\tilde{G}_{13} при $k = 2\pi$ (МПа)
1	9.0	9.6	122.75	41.29	477.8	585.4 (487.9)	576.3 (480.3)
2	9.0	9.5	113.84	36.63	428.8	525.4 (437.8)	517.2 (431.0)
3	8.5	9.3	156.27	37.07	471.1	575.1 (479.3)	567.8 (473.1)
Среднее	8.8	9.5	130.95	38.33	459.2	562.0 (468.3)	553.4 (461.5)

Формулу (22) с учетом первой и третьей формул из (19) можно представить в виде

$$\tilde{G}_{13} = \frac{E_1 h_0 k^2 L^2 P_{cr}}{12 k_c (D k^2 - L^2 P_{cr})}, \quad (48)$$

где $k = \pi$ при шарнирном опирании и $k = 2\pi$ при защемлении торцевых сечений тест-образцов. Если в соответствии с данными табл. 2–4 принять значения $P_{cr} = P^*$, $E_1 = E_1^-$ и $D = \frac{E_1^- h^3}{12}$, то при значениях h и b , приведенных в таблицах, по формуле (48) можно определить значения \tilde{G}_{13} . Найденные значения приведены в двух последних столбцах табл. 2–4. В них значения \tilde{G}_{13} в круглых скобках соответствуют коэффициенту $k_c = 1$, а вне скобок – коэффициенту $k_c = 5/6$.

Заметим, что наиболее близкое совпадение значений \tilde{G}_{13} и σ_1^{-*} имеет место в случае защемления торцевых сечений тест-образцов при $k_c = 1$. Этот вывод подтверждает использованное в статье предположение о том, что определяемое при испытаниях значение σ_1^{-*} с большой степенью точности может быть принято за значение касательного модуля поперечного сдвига \tilde{G}_{13} , при достижении которого в окрестности торцевого сечения тест-образца происходит его разрушение по причине реализации не чисто поперечно-сдвиговой, а близкой к ней изгибно-сдвиговой ФПУ как при большой ($h_0 \approx 0.5$, табл. 4), так и средней ($h_0 \approx 0.16$, табл. 3) относительной толщине.

Видно, что при длине образцов $L = 25$ мм и $h = 4.1$ мм для обоих рассмотренных типов композитов различие между \tilde{G}_{13} и σ_1^{-*} становится более существенным (но не более 7–8%). Как и следовало ожидать, проведенный анализ результатов показал, что у образцов с параметром $h_0 = 0.16$ при шарнирном опирании торцевых сечений (не имеющем места в экспериментах) изгибно-сдвиговая ФПУ может реализоваться при значительно больших значениях \tilde{G}_{13} , чем при защемлении.

Основные выводы и заключение

Сформулированные выше выводы вполне объяснимы и допускают достаточно полное теоретическое обоснование. При сжатии тест-образцов из композитов рассматриваемого класса по схеме рис. 2 наиболее адекватной является расчетная схема, в которой торцевые сечения принимаются защемленными. При этом, как следует из анализа результатов, полученных в [36], уравнения, соответствующие использованию аппроксимаций (29), требуют постановки граничных условий $\tau_1(0) = \tau_1(L) = 0$, что соответствует переходу от модели (29) к классической модели Кирхгофа–Лява. Однако такой вид граничных условий не соответствует реальному процессу деформирования при переходе в возмущенное состояние. В то же время при использовании уравнений (39)–(41), основанных на аппроксимациях (38), в сечениях $x = 0$, $x = L$ при их защемлении требуется формулировка условий $\gamma_1(0) = \gamma_1(L) = 0$, $\chi_1(0) = \chi_1(L) = 0$. В результате их использования в решении задачи о возмущенном равновесном состоянии в окрестности защемленных сечений имеет место переход к известной и используемой в работе кинематической модели С.П. Тимошенко с уравнениями равновесия (10). В этих уравнениях при вычислении жесткостей \hat{B}_{13} и \hat{B}_{13} коэффициент поперечного сдвига k_c близок к 1, а не к 5/6. Наиболее близким к такому напряженно-деформированному состоянию с коэффициентом $k_c = 1$ оказалось НДС тест-образцов с параметром $h_0 \approx 0.5$. Для них экспериментальные значения (пятый столбец табл. 4) практически совпадают со значениями, приведенными в скобках

последнего столбца. Поэтому допустимо считать, что у таких образцов в возмущенном деформированном состоянии, являющемся изгибно-сдвиговым, главной частью деформаций являются поперечно-сдвиговые составляющие.

В то же время у образцов с параметром $h_0 \approx 0.16$ приведенные в последнем столбце табл. 3 значения \tilde{G}_{13} (заключенные в скобки) оказались заметно больше аналогичных значений табл. 4. Приведенные в табл. 3 экспериментальные значения σ_1^{-*} также оказались заметно больше, чем аналогичные значения табл. 4. Отсюда следует, что в формуле

$$P_{cr}^b = \frac{4\pi^2 D}{(1 + 4\pi^2 r) L^2}$$

параметр $r = \frac{E_1 h_0^2}{12 \tilde{G}_{13}}$ в силу малости h_0 вносит гораздо меньший вклад в значение P_{cr}^b , а реализующаяся в экспериментах форма потери устойчивости оказывается преимущественно изгибной, имеющей место при гораздо больших формирующихся в образцах значениях \tilde{G}_{13} , чем в образцах с параметром $h_0 \approx 0.5$.

Таким образом, проведен анализ найденных аналитических решений задач о макромасштабных изгибно-сдвиговых и чисто поперечно-сдвиговых формах потери устойчивости тест-образцов из волокнистых композитов со структурой $[0^\circ]_s$ (s – число монослоев), а также мезомасштабных поперечно-сдвиговых ФПУ их периферийных слоев при осевом сжатии. Рассмотрены материалы, которые характеризуются физически нелинейной зависимостью лишь между формирующимися поперечными касательными напряжениями и соответствующими сдвиговыми деформациями. Решения получены при использовании трех вариантов линеаризованных уравнений равновесия в возмущенном состоянии, основанных на известной в литературе простейшей уточненной модели С.П. Тимошенко; аппроксимации прогиба линейным законом, а осевых перемещений – кубическим полиномом по поперечной координате при предварительном удовлетворении граничным условиям по тангенциальным усилиям (первый уточненный вариант; модель типа Редди – Немировского) и без предварительного удовлетворения таким условиям (второй уточненный вариант). В использованных линеаризованных уравнениях физическая нелинейность материала учтена в соответствии с концепцией Шенли на основе рассмотрения касательного модуля поперечного сдвига. В них имеются такие слагаемые с коэффициентами, вырождение которых соответствует реализации чисто поперечно-сдвиговых ФПУ при сжатии образца как в осевом (вдоль волокон), так и в поперечном (поперек волокон) направлениях. Для тест-образцов средней относительной толщины показана практически полная идентичность результатов, полученных на основе трех использованных вариантов уравнений, соответствующих реализации преимущественно изгибно-сдвиговой ФПУ при сжатии. Исходя из анализа полученных теоретических решений и экспериментальных результатов, показано, что для относительно толстых тест-образцов характерно разрушение по причине потери устойчивости по такой макромасштабной изгибно-сдвиговой форме, которая является преимущественно поперечно-сдвиговой и реализуется при осредненном по толщине сжимающем напряжении, равном по величине касательному модулю поперечного сдвига композита в окрестности торцевого сечения рабочей длины тест-образца в его невозмущенном состоянии.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A.* Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading // *Compos. Struct.* 2010. V. 92, No 2. P. 295–305. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.010>.
2. *Hapke J., Gehrig F., Huber N., Schulte K., Lilleodden E.T.* Compressive failure of UD-CFRP containing void defects: *In situ* SEM microanalysis // *Compos. Sci. Technol.* 2011. V. 71, No 9. P. 1242–1249. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2011.04.009>.
3. *Niu K., Talreja R.* Modeling of compressive failure in fiber reinforced composites // *Int. J. Solids Struct.* 2000. V. 37, No 17. P. 2405–2428. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00010-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00010-4).
4. *Naik N.K., Kumar R.S.* Compressive strength of unidirectional composites: Evaluation and comparison of prediction models // *Compos. Struct.* 1999. V. 46, No 3. P. 299–308. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(99\)00098-7](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00098-7).
5. *Davidson P., Waas A.M.* Mechanics of kinking in fiber-reinforced composites under compressive loading // *Math. Mech. of Solids.* 2016. V. 21, No 6. P. 667–684. <https://doi.org/10.1177/1081286514535422>.
6. *Prabhakar P., Waas A.M.* Interaction between kinking and splitting in the compressive failure of unidirectional fiber reinforced laminated composites // *Compos. Struct.* 2013. V. 98. P. 85–92. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.005>.
7. *Pimenta S., Gutkin R., Pinho S.T., Robinson P.* A micromechanical model for kink-band formation: Part I — experimental study and numerical modelling // *Compos. Sci. Technol.* 2009. V. 69, Nos 7–8. P. 948–955. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.02.010>.
8. *Lee S.H., Yerramalli C.S., Waas A.M.* Compressive splitting response of glass reinforced unidirectional composites // *Compos. Sci. Technol.* 2000. V. 60, No 16. P. 2957–2966. [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(00\)00159-7](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(00)00159-7).
9. *Allix O., Feld N., Baranger E., Guimard J.-M., Ha-Minh C.* The compressive behaviour of composites including fiber kinking: Modelling across the scales // *Meccanica.* 2014. V. 49, No 11. P. 2571–2586. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9872-y>.
10. *Полилов А.Н.* Этюды по механике композитов. М.: Физматлит, 2015. 320 с.
11. *Гузь А.Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 270 с.
12. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
13. Справочник по композиционным материалам: в 2-х кн. Кн. 2. Под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера и др.; под ред. Б.Э. Геллера. М.: Машиностроение, 1988. 584 с.
14. *Suarez J.A., Whiteside J.B., Hadcock R.N.* The influence of local failure modes on the compressive strength of boron/epoxy composites // *Composite Materials: Testing and Design (Second Conf.)*. Corten H. (Ed.). ASTM Special Technical Publication 497. Philadelphia, PA: ASTM Int., 1972. P. 237–257. <https://doi.org/10.1520/STP27750S>.
15. *Budiansky B., Fleck N.A.* Compressive failure of fibre composites // *J. Mech. Phys. Solids.* 1993. V. 41, No 1. P. 183–211. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90068-Q](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90068-Q).

16. *Li Xu Y., Reifsnider K.L.* Micromechanical modeling of composite compressive strength // *J. Compos. Mater.* 1993. V. 27, No 6. P. 572–588. <https://doi.org/10.1177/002199839302700602>.
17. *Zhang G., Latour R.A., Jr.* FRP composite compressive strength and its dependence upon interfacial bond strength, fiber misalignment, and matrix nonlinearity // *J. Thermoplast. Compos. Mater.* 1993. V. 6, No 4. P. 298–311. <https://doi.org/10.1177/089270579300600403>.
18. *Zhang G., Latour R.A., Jr.* An analytical and numerical study of fiber microbuckling // *Compos. Sci. Technol.* 1994. V. 51, No 1. P. 95–109. [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(94\)90160-0](https://doi.org/10.1016/0266-3538(94)90160-0).
19. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // *Механ. композ. матер.* 1988. Т. 24, № 2. С. 287–298.
20. *Noor A.K., Burton W.S.* Assessment of computational models for multilayered composite shells // *Appl. Mech. Rev.* 1990. V. 43, No 4. P. 67–97. <https://doi.org/10.1115/1.3119162>.
21. *Пискунов В.Г., Рассказов А.О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // *Прикл. механ.* 2002. Т. 38, № 2. С. 22–57.
22. *Paimushin V.N.* Refined models for an analysis of internal and external buckling modes of a monolayer in a layered composite // *Mech. Compos. Mater.* 2017. V. 53, No 5. P. 613–630. <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9691-7>.
23. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Gazizullin R.K.* Mechanics of unidirectional fiber-reinforced composites: Buckling modes and failure under compression along fibers // *Mech. Compos. Mater.* 2018. V. 53, No 6. P. 737–752. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9699-7>.
24. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A.* Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests // *Z. Angew. Math. Mech.* 2019. V. 99, No 1. Art. e201800063. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800063>.
25. *Каюмов Р.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А.* Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* 2015. Т. 157, кн. 4. С. 112–132.
26. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A.* Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder // *Mech. Compos. Mater.* 2018. V. 54, No 1. P. 2–12. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9712-1>.
27. *Paimushin V.N., Kayumov R.A., Tarlakovskii D.V., Kholmogorov S.A.* Deformation model of $[\pm 45]_s$ cross-ply fiber reinforced plastics under tension // *Proc. 2nd Int. Conf. on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics (ICTAEM 2019)*. Gdoutos E. (Ed.). Ser.: Structural Integrity. Vol. 8. Cham: Springer, 2019. P. 29–35. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_6.
28. *Paimushin V.N., Kayumov R.A., Kholmogorov S.A.* Deformation features and models of $[\pm 45]_{2s}$ cross-ply fiber-reinforced plastics in tension // *Mech. Compos. Mater.* 2019. V. 55, No 2. P. 141–154. <https://doi.org/10.1007/s11029-019-09800-5>.
29. *Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Shishov M.A.* Flat internal buckling modes of fibrous composite elements under tension and compression at the mini- and microscale // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2019. V. 60, No 3. P. 548–559. <https://doi.org/10.1134/S0021894419030180>.

30. Paimushin V.N., Polykova N.V., Kholmogorov S.A., Shishov M.A. Buckling modes of structural elements of off-axis fiber-reinforced plastics // *Mech. Compos. Mater.* 2018. V. 54, No 2. P. 133–144. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9726-8>.
31. Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Shishov M.A. Spatial buckling modes of a fiber (fiber bundle) of composites with a $[\pm 45^\circ]_{2s}$ stacking sequence under tension and compression on test specimens // *Mech. Compos. Mater.* 2020. V. 55, No 6. P. 743–760. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09855-9>.
32. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинатне, 1974. 310 с.
33. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
34. Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Polyakova N.V. Shear buckling mode and failure of flat fiber-reinforced specimens under axial compression 1. Refined nonlinear mathematical deformation model // *Mech. Compos. Mater.* 2023. V. 59, No 5. P. 885–900. <https://doi.org/10.1007/s11029-023-10140-8>.
35. Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Polyakova N.V. Shear buckling mode and failure of flat fiber-reinforced specimens in the axial compression 2. Numerical method, experimental and numerical investigations of the specimens with a $[0]_s$ layup // *Mech. Compos. Mater.* 2024. V. 59, No 6. P. 1065–1082. <https://doi.org/10.1007/s11029-023-10157-z>.
36. Paimushin V.N., Makarov M.V., Polyakova N.V., Shishov M.A., Kamalutdinov A.M., Panin S.V. Refined nonlinear deformation models of semi-infinite plates made of fiber reinforced plastics. 1. Reddy–Nemirovsky type model // *Lobachevskii J. Math.* 2022. V. 43, No 8. P. 2257–2266. <https://doi.org/10.1134/S1995080222110245>.

References

1. Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A. Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading. *Compos. Struct.*, 2010, vol. 92, no. 2, pp. 295–305. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.010>.
2. Hapke J., Gehrig F., Huber N., Schulte K., Lilleodden E.T. Compressive failure of UD-CFRP containing void defects: *In situ* SEM microanalysis. *Compos. Sci. Technol.*, 2011, vol. 71, no. 9, pp. 1242–1249. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2011.04.009>.
3. Niu K., Talreja R. Modeling of compressive failure in fiber reinforced composites. *Int. J. Solids Struct.*, 2000, vol. 37, no. 17, pp. 2405–2428. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00010-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00010-4).
4. Naik N.K., Kumar R.S. Compressive strength of unidirectional composites: Evaluation and comparison of prediction models. *Compos. Struct.*, 1999, vol. 46, no. 3, pp. 299–308. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(99\)00098-7](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00098-7).
5. Davidson P., Waas A.M. Mechanics of kinking in fiber-reinforced composites under compressive loading. *Math. Mech. of Solids*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 667–684. <https://doi.org/10.1177/1081286514535422>.
6. Prabhakar P., Waas A.M. Interaction between kinking and splitting in the compressive failure of unidirectional fiber reinforced laminated composites. *Compos. Struct.*, 2013, vol. 98, pp. 85–92. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.005>.

7. Pimenta S., Gutkin R., Pinho S.T., Robinson P. A micromechanical model for kink-band formation: Part I – experimental study and numerical modelling. *Compos. Sci. Technol.*, 2009, vol. 69, nos. 7–8, pp. 948–955. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.02.010>.
8. Lee S.H., Yerramalli C.S., Waas A.M. Compressive splitting response of glass reinforced unidirectional composites. *Compos. Sci. Technol.*, 2000, vol. 60, no. 16, pp. 2957–2966. [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(00\)00159-7](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(00)00159-7).
9. Allix O., Feld N., Baranger E., Guimard J.-M., Ha-Minh C. The compressive behaviour of composites including fiber kinking: Modelling across the scales. *Meccanica*, 2014, vol. 49, no. 11, pp. 2571–2586. <https://doi.org/10.1007/s11012-013-9872-y>.
10. Polilov A.N. *Etyudy po mekhanike kompozitov* [Studies on the Mechanics of Composites]. Moscow, Fizmatlit, 2015. 320 p. (In Russian)
11. Guz' A.N. *Ustoichivost' uprugikh tel pri konechnykh deformatsiyakh* [Stability of Elastic Bodies under Finite Deformations]. Kyiv, Naukova Dumka, 1973. 270 p. (In Russian)
12. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogoslainnykh konstruksii* [Mechanics of Multilayer Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 375 p. (In Russian)
13. Lubin G. (Ed.) *Spravochnik po kompozitsionnym materialam* [Handbook of Composites]. Book 2. Geller A.B. (Trans.), Geller B.E. (Ed.). Moscow, Mashinostroenie, 1988. 584 p. (In Russian)
14. Suarez J.A., Whiteside J.B., Hadcock R.N. The influence of local failure modes on the compressive strength of boron/epoxy composites. *Composite Materials: Testing and Design (Second Conf.)*. Corten H. (Ed.). ASTM Special Technical Publication 497. Philadelphia, PA, ASTM Int., 1972, pp. 237–257. <https://doi.org/10.1520/STP27750S>.
15. Budiansky B., Fleck N.A. Compressive failure of fibre composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, vol. 41, no. 1, pp. 183–211. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90068-Q](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90068-Q).
16. Xu Y.L., Reifsnider K.L. Micromechanical modeling of composite compressive strength. *J. Compos. Mater.*, 1993, vol. 27, no. 6, pp. 572–588. <https://doi.org/10.1177/002199839302700602>.
17. Zhang G., Latour R.A., Jr. FRP composite compressive strength and its dependence upon interfacial bond strength, fiber misalignment, and matrix nonlinearity. *J. Thermoplast. Compos. Mater.*, 1993, vol. 6, no. 4, pp. 298–311. <https://doi.org/10.1177/089270579300600403>.
18. Zhang G., Latour R.A., Jr. An analytical and numerical study of fiber microbuckling. *Compos. Sci. Technol.*, 1994, vol. 51, no. 1, pp. 95–109. [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(94\)90160-0](https://doi.org/10.1016/0266-3538(94)90160-0).
19. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. General direction of development of the theory of multilayered shells. *Mech. Compos. Mater.*, 1988, vol. 24, no. 2, pp. 231–241. <https://doi.org/10.1007/BF00608158>.
20. Noor A.K., Burton W.S. Assessment of computational models for multilayered composite shells. *Appl. Mech. Rev.*, 1990, vol. 43, no. 4, pp. 67–97. <https://doi.org/10.1115/1.3119162>.
21. Piskunov V.G., Rasskazov A.O. Development of the theory of layered plates and shells. *Prikl. Mekh.*, 2002, vol. 38, no. 2, pp. 22–57. (In Russian)
22. Paimushin V.N. Refined models for an analysis of internal and external buckling modes of a monolayer in a layered composite. *Mech. Compos. Mater.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 613–630. <https://doi.org/10.1007/s11029-017-9691-7>.

23. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Gazizullin R.K. Mechanics of unidirectional fiber-reinforced composites: Buckling modes and failure under compression along fibers. *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 53, no. 6, pp. 737–752. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9699-7>.
24. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A. Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2019, vol. 99, no. 1, art. e201800063. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800063>.
25. Kayumov R.A., Lukankin S.A., Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Identification of mechanical properties of fiber-reinforced composites. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 112–132. (In Russian)
26. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 2–12. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9712-1>.
27. Paimushin V.N., Kayumov R.A., Tarlakovskii D.V., Kholmogorov S.A. Deformation model of $[\pm 45^\circ]_s$ cross-ply fiber reinforced plastics under tension. *Proc. 2nd Int. Conf. on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics (ICTAEM 2019)*. Gdoutos E. (Ed.). Ser.: Structural Integrity. Vol. 8. Cham, Springer, 2019, pp. 29–35. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_6.
28. Paimushin V.N., Kayumov R.A., Kholmogorov S.A. Deformation features and models of $[\pm 45^\circ]_{2s}$ cross-ply fiber-reinforced plastics in tension. *Mech. Compos. Mater.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 141–154. <https://doi.org/10.1007/s11029-019-09800-5>.
29. Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Shishov M.A. Flat internal buckling modes of fibrous composite elements under tension and compression at the mini- and microscale. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2019, vol. 60, no. 3, pp. 548–559. <https://doi.org/10.1134/S0021894419030180>.
30. Paimushin V.N., Polykova N.V., Kholmogorov S.A., Shishov M.A. Buckling modes of structural elements of off-axis fiber-reinforced plastics. *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 133–144. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9726-8>.
31. Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Shishov M.A. Spatial buckling modes of a fiber (fiber bundle) of composites with a $[\pm 45^\circ]_{2s}$ stacking sequence under tension and compression on test specimens. *Mech. Compos. Mater.*, 2020, vol. 55, no. 6, pp. 743–760. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09855-9>.
32. Rikards R.B., Teters G.A. *Ustoychivost' obolochek iz kompozitnykh materialov* [The Stability of Shells Made of Composite Materials]. Riga, Zinatne, 1974. 310 p. (In Russian)
33. Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstruktzii iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Composite Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 272 p. (In Russian)
34. Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Polyakova N.V. Shear buckling mode and failure of flat fiber-reinforced specimens under axial compression 1. Refined nonlinear mathematical deformation model. *Mech. Compos. Mater.*, 2023, vol. 59, no. 5, pp. 885–900. <https://doi.org/10.1007/s11029-023-10140-8>.
35. Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Polyakova N.V. Shear buckling mode and failure of flat fiber-reinforced specimens in the axial compression 2. Numerical method, experimental and numerical investigations of the specimens with a $[0]_s$ layup. *Mech. Compos. Mater.*, 2024, vol. 59, no. 6, pp. 1065–1082. <https://doi.org/10.1007/s11029-023-10157-z>.

36. Paimushin V.N., Makarov M.V., Polyakova N.V., Shishov M.A., Kamalutdinov A.M., Panin S.V. Refined nonlinear deformation models of semi-infinite plates made of fiber reinforced plastics. 1. Reddy–Nemirovsky type model. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 8, pp. 2257–2266. <https://doi.org/10.1134/S1995080222110245>.

Информация об авторах

Виталий Николаевич Паймушин, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прочность конструкций», Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: vpajmushin@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4070-2579>

Сергей Андреевич Холмогоров, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прочность конструкций», Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: hkazan@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9942-6786>

Максим Викторович Макаров, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Казанский (Приволжский) федеральный университет; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: makarovmaksim@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6619-5651>

Наталья Витальевна Левшонкова, ведущий инженер, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: NVPolyakova@kai.ru

Максим Александрович Шишов, ведущий инженер, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: maxim.shishov@mail.ru

Author Information

Vitaly N. Paimushin, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Department of Structural Strength, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: vpajmushin@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4070-2579>

Sergey A. Kholmogorov, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Structural Strength, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: hkazan@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9942-6786>

Maksim V. Makarov, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Kazan Federal University; Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: makarovmaksim@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6619-5651>

Natal'ya V. Levshonkova, Leading Engineer, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: *NVPolyakova@kai.ru*

Maksim A. Shishov, Leading Engineer, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: *maxim.shishov@mail.ru*

Поступила в редакцию 3.02.2025

Принята к публикации 5.04.2025

Received February 3, 2025

Accepted April 5, 2025