

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.244-266>**О некоторых свойствах коэффициентов в методе
структурных функций****Л.А. Кабанова***Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова**liubov.kabanova@math.msu.ru***Аннотация**

Исследованы параметры метода структурных функций – способа построения приближенного решения задач теории упругости для неоднородных тел. Доказана эквивалентность двух существующих подходов к вычислению структурных функций; расширен список свойств структурных функций. Метод структурных функций основан на представлении перемещений в неоднородном теле в виде ряда по производным перемещений в однородном (сопутствующем) теле. Сопутствующее тело предполагается имеющим ту же геометрию, что и неоднородное, и нагруженным так же, как неоднородное тело. При решении практических задач представление решения в виде ряда необходимо заменить частичной суммой упомянутого ряда. Для частного вида приближенного решения сопутствующей задачи показана взаимосвязь количества слагаемых в частичной сумме упомянутого ряда и порядка приближения решения сопутствующей задачи; приведены соображения для выбора упругих свойств сопутствующего тела.

Ключевые слова: метод структурных функций, приближенное решение, трехмерная задача теории упругости

Благодарности. Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М.В. Ломоносова.

Для цитирования: Кабанова Л.А. О некоторых свойствах коэффициентов в методе структурных функций // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 244–266. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.244-266>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.244-266>

On some properties of the coefficients in the structural functions method

L.A. Kabanova

Moscow State University, Moscow, Russia

liubov.kabanova@math.msu.ru

Abstract

Some parameters of the structural functions method, which is used to construct an approximate solution to the elasticity problem for inhomogeneous solids, were analyzed. The equivalence of two existing approaches to computing structural functions was proved, and the set of known properties of structural functions was expanded. It was demonstrated that the method approximates the displacements in an inhomogeneous body by expressing them as a series involving derivatives of the displacements in a homogeneous (concomitant) body with the same geometry and loading. In practical applications, the series representation of the solution must be replaced by the partial sum of the series. For a specific class of approximate solutions to the concomitant problem, a relationship was established between the number of terms used in the partial sum of the series and the approximation order of the solution to the concomitant problem. Criteria for selecting elastic properties of the concomitant body were discussed.

Keywords: structural functions method, approximate solution, three-dimensional problem of elasticity theory

Acknowledgments. This study was performed as part of the state assignment to Moscow State University.

For citation: Kabanova L.A. On some properties of the coefficients in the structural functions method. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 244–266. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.244-266>. (In Russian)

Введение

Статья посвящена исследованию метода структурных функций ([1–3] и др.) – способ построения приближенного решения трехмерной задачи теории упругости [4] для тела произвольной неоднородности, разработанного В.И. Горбачевым. Исследование неоднородных материалов и конструкций, изготовленных из композиционных материалов, – одна из наиболее динамично развивающихся областей знания в силу широкого применения изделий из композиционных материалов и высоких потребительских характеристик последних. Заметим, однако, что использование композиционных материалов может быть эффективным в первую очередь при условии использования высокоточных методов расчета, корректно описывающих качественные и количественные особенности напряженно-деформированного состояния неоднородного тела. Один из наиболее распространенных приемов решения задач механики неоднородных тел – сведение последних к эквивалентной (в том или ином смысле) задаче для однородного тела путем осреднения упругих свойств неоднородного материала различными методами. Среди таких методов необходимо отметить в первую очередь осреднение по Фойгту [5], по Рейссу [6, 7]; уточненный подход Хашина – Штрихмана [8]. Большей точностью обладают разработанные позднее подходы (метод Мори – Танака [9], метод Эшелби и самосогласованный метод [10–12], метод трех фаз [13, 14]) и подходы, учитывающие геометрические особенности самого изделия (например, модель Григолюка – Куликова [15], модель Мураками [16] для слоистых пластин). Более подробный обзор литературы по тематике эффективных свойств материалов приведен, например, в работах [17, 18]. Одним из наиболее гибких и универсальных подходов можно назвать асимптотический метод, восходящий к работам Н.С. Бахвалова [19] и Б.Е. Победри [4], а ныне реализованный для вязкоупругих материалов [20], ряда задач нелинейной теории упругости [21], упругопластичности [22], теории пластин [23–25] и других задач [26]. Асимптотический метод подразумевает необходимость выбора малого геометрического параметра, что может быть возможно не всегда. Поэтому в работе [27] в качестве варианта обобщения асимптотического метода был построен метод интегральной формулы, давший начало методу структурных функций (МСФ): в работе [1] приведены соотношения МСФ для первой и второй краевых задач, а также показано, что соотношения МСФ для первой краевой задачи могут быть применены к решению смешанной краевой задачи. В более поздних работах того же автора и его учеников МСФ обобщен на случай динамической задачи теории упругости [28], моментной теории упругости [29]; получены упрощенные варианты метода для одномерных и двумерных постановок задач [30, 31]. В работе [32] продемонстрировано применение вариации МСФ для второй краевой задачи – показано, что МСФ-приближения в ряде классических задач совпадают с известными решениями; в работе [33] – для вычисления эффективных свойств неоднородного тела – показано, что результат применения МСФ сопоставим с результатами вычислений по методу Мори – Танака; в статье [3] приведены структурные функции (СФ) для неоднородной полосы. В работах [34–36] построены МСФ-приближения решения задачи о нагружении прямоугольной пластины – показано, что МСФ-приближения позволяют моделировать ряд важных качественных особенностей компонент напряженно-деформированного состояния пластины. Применение МСФ требует выбора некоторых параметров, таких как упругие свойства сопутствующего тела, точность решения сопутствующей задачи, порядок МСФ. В [36] показано, что выбор этих параметров влияет на качество полученного приближения. Настоящая работа посвящена исследованию некоторых свойств структурных функций, а также параметров МСФ.

1. Определение и свойства структурных функций

Общий вариант МСФ в перемещениях позволяет построить решение квазистатической задачи теории упругости для тела произвольной неоднородности [4]:

$$\begin{aligned} [C_{ijkl}(\vec{x})u_{k,l}(\vec{x})]_{,j} + X_i(\vec{x}) &= 0, \quad \sigma_{ij}(\vec{x}) = C_{ijkl}(\vec{x})\varepsilon_{kl}(\vec{x}), \\ \varepsilon_{ij}(\vec{x}) &= \frac{1}{2}[u_{i,j}(\vec{x}) + u_{j,i}(\vec{x})], \\ u_i \Big|_{\Sigma_u} &= u_i^0, \quad \sigma_{ij}n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $C_{ijkl}(\vec{x})$ – тензор упругих модулей неоднородного тела, удовлетворяющий обычным термодинамическим ограничениям [4]; u_i , ε_{ij} , σ_{ij} – компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений неоднородного тела; X_i – объемные силы; Σ_u и Σ_σ – часть границы тела с кинематическими или статическими краевыми условиями соответственно, их объединение совпадает с полной границей тела; n_i – внешняя нормаль к границе. Система координат $Ox_1x_2x_3$ – декартова, по повторяющимся малым латинским индексам предполагается суммирование от 1 до 3, а индекс после запятой обозначает производную: $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Задачу (1) далее будем называть *исходной*.

В работах [1, 27] установлено, что решение исходной задачи можно построить в виде

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + \int_V G_{m|n}^{(i)}(\vec{\xi}, \vec{x}) [C_{mnkl}^0 - C_{mnkl}(\vec{\xi})] e_{kl}(\vec{\xi}) dV_\xi, \quad (2)$$

где $|n$ обозначает частную производную $\frac{\partial}{\partial \xi_n}$; $G_k(\vec{x}, \vec{\xi})$ – тензор Грина неоднородного тела [37],

$$\begin{aligned} [C_{ijkl}G_{k,l}^{(t)}(\vec{x}, \vec{\xi})]_{,j} &= -\delta_{it}\delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2)\delta(x_3 - \xi_3), \\ G_i^{(t)} \Big|_{\Sigma_u} &= 0, \quad C_{ijkl}G_{k,l}^{(t)}n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а $v_k(\vec{x})$ – решение квазистатической задачи в перемещениях для однородного тела той же формы, которая аналогична исходной с точки зрения внешних нагрузок и граничных условий:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^0 v_{k,l,j}(\vec{x}) + X_i(\vec{x}) &= 0, \quad s_{ij}(\vec{x}) = C_{ijkl}^0 e_{kl}(\vec{x}), \quad e_{ij}(\vec{x}) = \frac{1}{2}[v_{i,j}(\vec{x}) + v_{j,i}(\vec{x})], \\ v_i \Big|_{\Sigma_u} &= u_i^0, \quad s_{ij}n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь C_{ijkl}^0 – тензор упругих модулей однородного тела, удовлетворяющий обычным термодинамическим ограничениям; v_i , e_{ij} , s_{ij} – компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений однородного тела. Задачу (4) далее будем называть *сопутствующей*.

Непосредственное вычисление компонент тензора Грина неоднородного тела представляет собой отдельную сложную задачу, поэтому в работе [27] было предложено использовать приближение интегральной формулы (2) соотношением

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{ikli_1\dots i_q}(\vec{x}) e_{kl,i_1\dots i_q}(\vec{x}). \quad (5)$$

Коэффициенты $N_{ikli_1\dots i_q}(\vec{x})$ представления (5) называют структурными функциями (СФ). В [1] были предложены два подхода к вычислению последних.

1.1. Вычисление структурных функций. Подстановкой соотношения (5) в интегральную формулу (2) можно получить *определение* СФ [1]:

$$N_{ikli_1\dots i_q} = \int_V \frac{1}{q!} G_{m|n}^{(i)}(\vec{\xi}, \vec{x}) [C_{mnkl}^0 - C_{mnkl}(\vec{\xi})] (\xi_{i_1} - x_{i_1}) \dots (\xi_{i_q} - x_{i_q}) dV_{\xi}. \quad (6)$$

Использование соотношения (6) – первый способ нахождения СФ в конкретной задаче, однако его применение затрудняется необходимостью вычислять компоненты тензора Грина. В [1] предложен другой способ нахождения СФ – из соображений совпадения объемных сил в исходной (1) и сопутствующей (4) задаче, $[C_{ijkl}(\vec{x})u_{k,l}(\vec{x})]_{,j} = C_{ijkl}^0 v_{k,lj}(\vec{x})$. Подставив в это соотношение выражение (5) для перемещений u_i^1 , перепишем его в терминах производных $e_{mn}(\vec{x})$:

$$C_{ijkl}^0 e_{kl,j} = C_{ijkl,j} e_{kl} + C_{ijkl} e_{kl,j} + \sum_{q=0}^{\infty} \left[[C_{ijkl} N_{kmni_1\dots i_q,l}]_{,j} e_{mn,i_1\dots i_q} + \right. \\ \left. + C_{ijkl} N_{kmni_1\dots i_q,l} e_{mn,i_1\dots i_q,j} + [C_{ijkl} N_{kmni_1\dots i_q}]_{,j} e_{mn,i_1\dots i_q,l} + C_{ijkl} N_{kmni_1\dots i_q} e_{mn,i_1\dots i_q,lj} \right]. \quad (7)$$

Достаточное условие выполнения равенства (7) – совпадение коэффициентов при $e_{mn,i_1\dots i_q}$ – позволяет записать следующую рекуррентную систему уравнений в частных производных для отыскания СФ:

$$[C_{ijkl} N_{kmn,l} + C_{ijmn}]_{,j} = 0, \\ [C_{ijmn} N_{mkli_1,n} + C_{ijmi_1} N_{mkl}]_{,j} = C_{ii_1kl}^0 - [C_{ii_1mn} N_{mkl,n} + C_{ii_1kl}], \\ [C_{ijmn} N_{mkli_1\dots i_q,n} + C_{ijmi_q} N_{mkli_1\dots i_{q-1}}]_{,j} = \\ = -[C_{ii_qmn} N_{mkli_1\dots i_{q-1},n} + C_{ii_qmi_{q-1}} N_{mkli_1\dots i_{q-2}}], \quad q \geq 2. \quad (8)$$

Граничные условия к системе (8) можно записать аналогичным образом из соображений совпадения граничных условий в исходной (1) и сопутствующей (4) задачах

$$u_i \Big|_{\Sigma_u} = v_i \Big|_{\Sigma_u}, \quad \sigma_{ij} n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = s_{ij} n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} : \quad (9)$$

в форме, рекуррентной по порядку производной e_{mn} ,

$$N_{ikli_1\dots i_q} e_{kl,i_1\dots i_q} \Big|_{\Sigma_u} = 0, \quad q \geq 0, \quad (10)$$

$$[C_{ijkl} e_{kl} + C_{ijmn} N_{mkl,n} e_{kl}] n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = C_{ijkl}^0 e_{kl} n_j \Big|_{\Sigma_\sigma}, \quad q = 0, \quad (11)$$

$$[C_{ijmn} N_{mkli_1\dots i_{q-1}} e_{kl,i_1\dots i_{q-1},n} + C_{ijmn} N_{mkli_1\dots i_q,n} e_{kl,i_1\dots i_q}] n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = 0, \quad q \geq 1.$$

В [1] показано, что система (8), (10) и (11) является достаточным условием для выполнения с помощью интегральной формулы (2) уравнений равновесия в исходной задаче. Покажем, что представленные подходы к вычислению СФ (прямое вычисление по компонентам тензора Грина (6) и решение рекуррентной системы (8), (10)–(11)) полностью эквивалентны.

¹Аргументы функций опущены для краткости там, где это возможно.

Теорема 1. Структурные функции, определенные соотношениями (6), удовлетворяют соотношениям (8), (10) и (11).

Доказательство. Проведем непосредственную проверку: подставим СФ первого порядка, вычисленные в соответствии с (6), в первое уравнение системы (8) и обозначим результат через I :

$$\begin{aligned} & [C_{ijkl}(\vec{x})N_{kmn,l}(\vec{x}) + C_{ijmn}(\vec{x})]_{,j} = \\ & = \int_V [C_{ijkl}(\vec{x})G_{s|t,l}^{(k)}(\vec{\xi}, \vec{x})[C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\vec{\xi})]]_{,j} dV_{\xi} + C_{ijmn,j}(\vec{x}) = I. \end{aligned}$$

Поскольку $[C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\vec{\xi})]$ не зависит от \vec{x} ,

$$I = \int_V [C_{ijkl}(\vec{x})G_{s|t,l}^{(k)}(\vec{\xi}, \vec{x})]_{,j} [C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\vec{\xi})] dV_{\xi} + C_{ijmn,j}(\vec{x}) = I_1.$$

В силу теоремы Максвелла [37] для компонент тензора Грина $G_s^{(k)}(\vec{\xi}, \vec{x}) = G_k^{(s)}(\vec{x}, \vec{\xi})$ имеем

$$I_1 = \int_V [C_{ijkl}(\vec{x})G_{k,l}^{(s)}(\vec{x}, \vec{\xi})]_{,j|t} [C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\vec{\xi})] dV_{\xi} + C_{ijmn,j}(\vec{x}) = I_2.$$

Ввиду формулы для производной произведения, теоремы Остроградского–Гаусса, примененной к

$$\int_V \left[\left(C_{ijkl}(\vec{x})G_{k,l}^{(s)}(\vec{x}, \vec{\xi}) \right)_{,j} [C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\vec{\xi})] \right]_{|t} dV_{\xi},$$

уравнений и граничных условий для тензора Грина (3) получаем

$$\begin{aligned} I_2 & = \int_V \left[\left(C_{ijkl}(\vec{x})G_{k,l}^{(s)}(\vec{x}, \vec{\xi}) \right)_{,j} [C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\vec{\xi})] \right]_{|t} dV_{\xi} - \\ & - \int_V \left(C_{ijkl}(\vec{x})G_{k,l}^{(s)}(\vec{x}, \vec{\xi}) \right)_{,j} [C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\vec{\xi})]_{|t} dV_{\xi} + C_{ijmn,j}(\vec{x}) = \\ & = -C_{itmn,t}(\vec{x}) + C_{ijmn,j}(\vec{x}) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, N -функции первого порядка (6) удовлетворяют первому уравнению системы (8).

Преобразуем выражение для производной N -функции второго порядка, пользуясь тем, что координаты x_i декартовы и $x_{i,j} = \delta_{ij}$:

$$\begin{aligned} N_{kmni,l}(\vec{x}) & = \int_V [G_{s|t}^{(k)}(\vec{\xi}, \vec{x})(\xi_{i_1} - x_{i_1})]_{,l} [C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\xi)] dV_{\xi} = \\ & = \int_V G_{s|t,l}^{(k)}(\vec{\xi}, \vec{x})(\xi_{i_1} - x_{i_1}) [C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\xi)] dV_{\xi} - \int_V G_{s|t}^{(k)} [C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\xi)] \delta_{i_1 l} dV_{\xi} = \\ & = \int_V G_{k,l|t}^{(s)}(\vec{x}, \vec{\xi})(\xi_{i_1} - x_{i_1}) [C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\xi)] dV_{\xi} - N_{kmn}(\vec{x}) \delta_{i_1 l}. \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в левую часть второго уравнения системы (8):

$$\begin{aligned} [C_{ijkl}N_{kmni_1,l} + C_{ijki_1}N_{kmn}]_{,j} &= [-C_{ijkl}N_{kmn}\delta_{i_1l} + C_{ijki_1}N_{kmn}]_{,j} + \\ &+ \int_V [C_{ijkl}G_{k,l|t}^{(s)}(\vec{x}, \vec{\xi})]_{,j} [C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\xi)](\xi_{i_1} - x_{i_1})dV_{\xi} - \\ &- \int_V C_{ijkl}G_{s|t,l}^{(k)}(\vec{\xi}, \vec{x}) [C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\vec{\xi})]\delta_{i_1j}dV_{\xi} = \\ &= [C_{itmn}^0 - C_{itmn}(\vec{x})]\delta_{i_1t} - C_{i_1kl}N_{kmn,l}(\vec{x}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Аналогично, дифференцированием соотношения (6), проверяется выполнение заключительного уравнения системы (8) и граничных условий (10)–(11). Соответствующие технические выкладки опущены. \square

Теорема 2. *Решение системы уравнений в частных производных (8) с граничными условиями (10) и (11) единственно.*

Доказательство. Данное утверждение следует из единственности решения уравнений типа $[C_{ijkl}A_{kj_1\dots j_q,l}]_{,j} + B_{ij_1\dots j_q} = 0$, где $B_{ij_1\dots j_q}$ – произвольное тензорное поле, так как уравнения системы (8), разрешенные относительно старших по порядку СФ, имеют такой же вид. В свою очередь, единственность решения уравнений указанного вида следует из удовлетворения коэффициентов $C_{ijkl}(\vec{x})$ термодинамическим ограничениям. \square

Следствие 1. *Функции, удовлетворяющие системе (8) с граничными условиями (10) и (11), совпадают со СФ (6), определенными из интегральной формулы (2); два подхода к вычислению СФ (как взвешенных моментов тензора Грина и как решение системы уравнений в частных производных) эквивалентны.*

Следствие 2. *Для любой пары тензоров упругих свойств исходного и сопутствующего тел $C_{ijkl}(\vec{x})$ и C_{ijkl}^0 СФ, входящие в представление (2), определяются однозначно.*

1.2. Вывод уравнений для структурных функций из вариационного подхода. Рекуррентную систему уравнений (8) можно также получить, применив вариационный подход. Для этого предположим, что $v_k(\vec{x})$ – решение сопутствующей задачи (4), а перемещения в исходном теле имеют вид (5), в котором искомыми являются СФ; кроме того, пусть условия на кинематической границе Σ_u для СФ выполнены.

Функционал Лагранжа для исходного тела имеет вид [38]

$$\mathcal{L}[u] = \int_V [\sigma_{ij}(\vec{x})\varepsilon_{ij}(\vec{x})]/2dV - \int_V [X_i(\vec{x})u_i(\vec{x})]dV - \int_{\Sigma_{\sigma}} [P_i^0(\vec{x})u_i(\vec{x})]d\Sigma$$

и может быть переписан в терминах СФ:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[N] = & \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl}(\vec{x}) \left[v_{k,l}(\vec{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} \left(N_{kmni_1\dots i_q}(\vec{x}) v_{m,ni_1\dots i_q}(\vec{x}) \right) \right]_{,l} \times \\
& \times \left[v_{i,j}(\vec{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} \left(N_{istj_1\dots j_q}(\vec{x}) v_{s,tj_1\dots j_q}(\vec{x}) \right) \right]_{,j} dV - \\
& - \int_V C_{itop}^0 v_{o,pt}(\vec{x}) * \left[v_i(\vec{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{iuvk_1\dots k_q}(\vec{x}) v_{u,vk_1\dots k_q}(\vec{x}) \right] dV - \\
& - \int_{\Sigma_\sigma} C_{itop}^0 v_{o,p} n_t(\vec{x}) * \left[v_i(\vec{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{iuvk_1\dots k_q}(\vec{x}) v_{u,vk_1\dots k_q}(\vec{x}) \right] d\Sigma.
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь учтено, что $X_i(\vec{x}) = C_{ijkl}^0 v_{k,l}(\vec{x})$ во всем теле, $P_i^0(\vec{x}) = C_{ijkl}^0 v_{k,l}(\vec{x}) n_j$ на статической границе Σ_σ , а граничные условия на кинематической границе Σ_u выполнены.

Вариационное уравнение для функционала (12) имеет вид

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}[N] = & \int_V C_{ijkl}(\vec{x}) \left[\sum_{q=0}^{\infty} \left(\delta N_{kmni_1\dots i_q,l}(\vec{x}) v_{m,ni_1\dots i_q}(\vec{x}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \delta N_{kmni_1\dots i_q}(\vec{x}) v_{m,ni_1\dots i_q,l}(\vec{x}) \right) \right] \times \\
& \times \left[v_{i,j}(\vec{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} \left(N_{istj_1\dots j_q}(\vec{x}) v_{s,tj_1\dots j_q}(\vec{x}) \right) \right]_{,j} dV - \\
& - \int_V C_{itop}^0 v_{o,pt}(\vec{x}) \sum_{q=0}^{\infty} \delta N_{iuvk_1\dots k_q}(\vec{x}) v_{u,vk_1\dots k_q}(\vec{x}) dV - \\
& - \int_{\Sigma_\sigma} C_{itop}^0 v_{o,p} n_t(\vec{x}) \sum_{q=0}^{\infty} \delta N_{iuvk_1\dots k_q}(\vec{x}) v_{u,vk_1\dots k_q}(\vec{x}) d\Sigma = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Выделив слагаемые при $\delta N_{ikli_1\dots i_q}(\vec{x})$ и приравняв их к нулю, получим соотношения

$$\begin{aligned}
\left[C_{ijkl}(\vec{x}) \left(v_{i,j}(\vec{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} [N_{istj_1\dots j_q}(\vec{x}) v_{s,tj_1\dots j_q}(\vec{x})]_{,j} \right) \right]_{,l} &= C_{itop}^0 v_{o,pt}(\vec{x}), \quad x \in V, \\
\left[C_{ijkl}(\vec{x}) \left(v_{i,j}(\vec{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} [N_{istj_1\dots j_q}(\vec{x}) v_{s,tj_1\dots j_q}(\vec{x})]_{,j} \right) \right] n_l &= C_{itop}^0 v_{o,p}(\vec{x}) n_t, \quad x \in \Sigma_\sigma,
\end{aligned}$$

достаточные условия выполнения которых совпадают с системой (8)–(11).

1.3. Свойства структурных функций. В работе [1] отмечено, что СФ – взвешенные моменты тензора Грина; кроме того, СФ $N_{ikli_1\dots i_q}$ порядка q имеют размерность L^{q+1} , L – единица длины. Из определения (6) и эквивалентности подходов к вычислению СФ следуют дополнительные свойства СФ.

- А. СФ зависят от упругих свойств сопутствующего тела, но не от решения сопутствующей задачи, в том числе не зависят от точности, характера приближения и т. п. для приближенных решений сопутствующей задачи.
- В. СФ зависят от граничных условий исходной смешанной краевой задачи (1), но не зависят от величины и характера объемных сил, приложенных к исходному телу.
- С. В тривиальном случае $C_{ijkl}(\vec{x}) \equiv C_{ijkl}^0$ СФ тождественно обращаются в нуль.

2. Применение МСФ к решению трехмерных задач теории упругости

Рассмотрим вопрос о применении МСФ для построения решения конкретной задачи. Вычисление полной суммы ряда (5) не представляется возможным, следовательно, при практической реализации МСФ необходимо ограничиться представлением перемещений в исходном теле в виде частичной суммы ряда (5):

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + \sum_{q=0}^Q N_{ikli_1\dots i_q}(\vec{x}) v_{k,li_1\dots i_q}(\vec{x}). \quad (14)$$

Будем называть метод, основанный на этом представлении, МСФ порядка $Q+1$. Заметим, что поле, определенное соотношением (14), задает только приближенное решение исходной задачи.

Для сопутствующей задачи (4) – трехмерной задачи теории упругости для однородного тела – как правило, не построено точное аналитическое решение, однако разработано несколько приближенных решений разной точности; кроме того, из общих построений МСФ не следует напрямую выбор упругих свойств сопутствующего тела. Поскольку представление (14) задает приближенное решение исходной задачи, требует изучения влияния упомянутых параметров МСФ – Q , точности решения сопутствующей задачи и упругих свойств сопутствующего тела – на качественные и количественные свойства МСФ-приближений.

2.1. Пример: реализация МСФ для задачи о нагружении пластины. Опишем взаимное влияние порядка Q МСФ и точности решения сопутствующей задачи в следующем случае. Пусть приближенное решение сопутствующей задачи можно искать в виде

$$v_k(\vec{x}) = \sum_{r=0}^R x_3^{(r)} \varphi_k^{(r)}(x_1, x_2), \quad (15)$$

например, такой вид приближенного решения сопутствующей задачи соответствует случаю пластины [39, 40], если координаты x_1, x_2 – координаты в серединной плоскости пластины, а x_3 ортогональна серединной плоскости. Предположим также, что выбраны конкретные значения Q и R . Тогда определению из уравнений (8) и граничных условий (10)–(11) подлежат $\sum_{q=0}^Q [9(q+1)(q+2)]$ СФ.

Рассмотрим подробнее граничные условия (10). Будем называть условие (10) для функции $N_{ikli_1\dots i_q}$ *тривиальным*, если соответствующая производная $v_{k,li_1\dots i_q}(\vec{x}) \equiv 0 \forall \vec{x} \in \Sigma_u$, в противном случае будем называть условие *нетривиальным* для соответствующей

функции; из нетривиального условия на границе Σ_u автоматически следует условие $N_{ikl_1 \dots l_q} |_{\Sigma_u} = 0$ для соответствующих значений индексов. Аналогичную терминологию введем и для следствий из статических граничных условий (11). Перепишем граничные условия (10) и (11) с учетом представления решения сопутствующей задачи в виде (15) и конечного порядка МСФ:

$$\begin{aligned} & \left[N_{ikl_1 \dots l_q} \sum_{r=0}^R x_3^r \varphi_{k, l_1 \dots l_q}^r + N_{ik3l_1 \dots l_q} \sum_{r=0}^R r x_3^{r-1} \varphi_{k, l_1 \dots l_q}^r + \dots + \right. \\ & \left. + N_{ik \underbrace{3 \dots 3}_{q+1}} \sum_{r=0}^R r(r-1) \dots (r-q) x_3^{r-q-1} \varphi_k^r \right] \Big|_{\Sigma_u} = 0, \quad q = 0, \dots, Q; \\ & \left[\left(C_{ijkL} + C_{ijmn} N_{mkL,n} - C_{ijkL}^0 \right) \sum_{r=0}^R x_3^r \varphi_{k,L}^r + \right. \\ & \left. + \left(C_{ijk3} + C_{ijmn} N_{mk3,n} - C_{ijk3}^0 \right) \sum_{r=0}^R r x_3^{r-1} \varphi_k^r \right] n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = 0, \\ & \left[\left(C_{ijmI_q} N_{mkLI_1 \dots I_{q-1}} + C_{ijmn} N_{mkLI_1 \dots I_q, n} \right) \sum_{r=0}^R x_3^r \varphi_{k, LI_1 \dots I_q}^r + \dots + \right. \\ & \left. + \left(C_{ijm3} N_{mk \underbrace{3 \dots 3}_q} + C_{ijmn} N_{mk \underbrace{3 \dots 3}_{q+1}, n} \right) \sum_{r=0}^R r \dots (r-q) x_3^{r-q-1} \varphi_k^r \right] n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = 0, \\ & \quad q = 1, \dots, Q-1, \\ & \left[C_{ijmN} N_{mkLI_1 \dots I_Q} \sum_{r=0}^R x_3^r \varphi_{k, LI_1 \dots I_Q, N}^r + \dots + \right. \\ & \left. + C_{ijm3} N_{mk \underbrace{3 \dots 3}_{Q+1}} \sum_{r=0}^R r \dots (r-Q-1) x_3^{r-Q-2} \varphi_k^r \right] n_j \Big|_{\Sigma_\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Чтобы корректно вычислить СФ, необходимо наличие нетривиальных граничных условий для каждой из них. Таким образом, при $R < Q + 2$ система уравнений и граничных условий для N -функций смешанной задачи является недоопределенной. Иначе говоря, повышать порядок МСФ, не повышая точности решения сопутствующей задачи, нецелесообразно. В терминологии моделей пластин, принятой в работах [41] и др., в качестве решения сопутствующей задачи для МСФ порядка $Q + 1$ необходимо выбирать модель не меньшего порядка по поперечным деформациям. Алгоритм применения МСФ можно сформулировать следующим образом.

- A. Выбрать параметры R и Q с учетом рекомендуемого соотношения $R \geq Q + 2$.
- B. Поставить исходную и сопутствующую задачи.
- C. Выделить нетривиальные граничные условия для СФ.
- D. Определить общий вид СФ, отличных от 0. Выбрать упругие свойства сопутствующего тела.

Е. Построить итоговые приближения к решению исходной задачи.

Отметим, что из общих построений МСФ для смешанной краевой задачи не следуют никакие ограничения на выбор упругих свойств сопутствующего тела, за исключением обычных термодинамических ограничений на упругие модули материала: интегральная формула (2) верна независимо от выбора C_{ijkl}^0 . Однако при использовании МСФ конечного порядка выбор C_{ijkl}^0 существенно влияет на качество приближения к решению исходной задачи – это продемонстрировано, в частности, в работе [36]; ниже для примера приведем соображения для выбора упругих свойств сопутствующего тела.

2.2. Пример: приближенные решения задачи о нагружении слоистой свободно опертой на контуре пластины. В качестве примера применения МСФ рассмотрим задачу о нагружении прямоугольной пластины размером $L_1 \times L_2 \times h$, составленной из слоев, ортотропных в осях координат, параллельных сторонам пластины ($C_{\alpha\alpha\alpha\beta} = 0$, $C_{\alpha\alpha\beta\gamma} = 0$); свободно опертой на боковых гранях [40, 42]. Математическая постановка исходной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} & [C_{ijkl}(x_3)u_{k,l}(\vec{x})]_{,j} + X_i(\vec{x}) = 0, \\ & x_3 = \pm h/2 : \sigma_{i3}(x_1, x_2) = q_i^\pm(x_1, x_2), \\ & x_1 = 0, \quad L_1 : u_2(\cdot, x_2, x_3) = 0, \quad u_3(\cdot, x_2, x_3) = 0, \quad \sigma_{11}(\cdot, x_2, x_3) = 0, \\ & x_2 = 0, \quad L_2 : u_1(x_1, \cdot, x_3) = 0, \quad u_3(x_1, \cdot, x_3) = 0, \quad \sigma_{22}(x_1, \cdot, x_3) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

а сопутствующей задачи –

$$\begin{aligned} & C_{ijkl}^0 v_{k,lj}(\vec{x}) + X_i(\vec{x}) = 0, \\ & x_3 = \pm h/2 : s_{i3}(x_1, x_2) = q_i^\pm(x_1, x_2), \\ & x_1 = 0, \quad L_1 : v_2(\cdot, x_2, x_3) = 0, \quad v_3(\cdot, x_2, x_3) = 0, \quad s_{11}(\cdot, x_2, x_3) = 0, \\ & x_2 = 0, \quad L_2 : v_1(x_1, \cdot, x_3) = 0, \quad v_3(x_1, \cdot, x_3) = 0, \quad s_{22}(x_1, \cdot, x_3) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В работах [34, 36] описана процедура вычисления СФ первого и второго порядков для пары задач (16) и (17): приведем только выводы из этих вычислений. Для решения сопутствующей задачи подразумеваем, что выбор модели пластины не грубее, чем модель третьего порядка по поперечным деформациям (TSDT, [40, 41]).

2.2.1. Приближение первого порядка. МСФ-приближение первого порядка построим путем выбора $Q = 0$ в соотношении (14). В случае выбранной неоднородности система уравнений и граничных условий для отыскания СФ первого порядка примет вид [36]

$$[C_{i3mn}(x_3) + C_{i3k3}(x_3)N_{kmn,3}(x_3)]_{,3} = 0, \quad (18)$$

$$[C_{i3mn}(\pm h/2) + C_{i3k3}(\pm h/2)N_{kmn,3}(\pm h/2)] = C_{i3mn}^0, \quad (18)$$

$$C_{i3kl}(\pm h/2)N_{kmn}(\pm h/2) = 0. \quad (19)$$

Заметим, что система (19) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для функций $N_{113}(x_3)$, $N_{223}(x_3)$, $N_{311}(x_3)$, $N_{322}(x_3)$, $N_{333}(x_3)$,

на каждую из которых сформулированы четыре граничных условия. Первые уравнения системы (18) легко проинтегрировать:

$$\begin{aligned} N_{3\alpha\alpha} &= \int_{-h/2}^{x_3} (C_{33\alpha\alpha}^0 - C_{33\alpha\alpha})/C_{3333} dy + k_{3\alpha\alpha}, \\ N_{\alpha\alpha 3} &= \int_{-h/2}^{x_3} (C_{\alpha 3\alpha 3}^0 - C_{\alpha 3\alpha 3})/C_{\alpha 3\alpha 3} dy + k_{\alpha\alpha 3}, \end{aligned} \quad (20)$$

в соотношениях (20) и далее отсутствует суммирование по греческим индексам, а k_{ijk} – константы интегрирования. Соотношение же (19) при произвольных C_{ijkl}^0 удовлетворить нельзя: из условия (19) на нижней лицевой плоскости следует, что $k_{ijk} = 0$, а условие на верхней лицевой плоскости будет выполнено, если и только если

$$C_{33\alpha\alpha}^0 = \langle C_{33\alpha\alpha}/C_{3333} \rangle / \langle 1/C_{3333} \rangle, \quad C_{\alpha 3\alpha 3}^0 = 1 / \langle 1/C_{\alpha 3\alpha 3} \rangle. \quad (21)$$

Таким образом, поперечные модули сопутствующего тела уже не могут быть произвольными, а должны быть выбраны в соответствии с (21). Продольные же модули C_{IJKL}^0 остаются параметрами метода. Перемещения в исходном теле с учетом вида СФ (20), вида решения сопутствующей задачи (15) и $Q = 0$ в соотношении (14) имеют вид

$$\begin{aligned} u_1(\vec{x}) &= \sum_{r=0}^R \left[x_3^r \left(\varphi_1^{(r)}(x_1, x_2) + N_{113}(x_3) \varphi_{3,1}^{(r)}(x_1, x_2) \right) + N_{113}(x_3) r x_3^{r-1} \varphi_1^{(r)}(x_1, x_2) \right], \\ u_2(\vec{x}) &= \sum_{r=0}^R \left[x_3^r \left(\varphi_2^{(r)}(x_1, x_2) + N_{223}(x_3) \varphi_{3,2}^{(r)}(x_1, x_2) \right) + N_{223}(x_3) r x_3^{r-1} \varphi_2^{(r)}(x_1, x_2) \right], \\ u_3(\vec{x}) &= \sum_{r=0}^R \left[x_3^r \left(\varphi_3^{(r)}(x_1, x_2) + N_{311}(x_3) \varphi_{1,1}^{(r)}(x_1, x_2) + N_{322}(x_3) \varphi_{2,2}^{(r)}(x_1, x_2) \right) + \right. \\ &\quad \left. + r x_3^{r-1} N_{333}(x_3) \varphi_3^{(r)}(x_1, x_2) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Соотношения (22) задают набор приближений к решению исходной задачи (1), выполняющих граничные условия и параметризованных выбором C_{IJKL}^0 : все функции $\varphi_i^{(r)}(x_1, x_2)$ зависят от выбора C_{IJKL}^0 . Выбрать C_{IJKL}^0 необходимо так, чтобы соотношения (22) задавали поле перемещений, максимально приближенное к точному. Поскольку (22) при переменных C_{IJKL}^0 можно трактовать как кинематически допустимые поля перемещений, воспользуемся вариационным подходом, принимая во внимание, что параметр полей – C_{IJKL}^0 . Приведем только основные выкладки вариационного подхода. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{IJ}(\vec{x}) &= \sum_{r=0}^R \left[A_{IJKL}^{1,r}(x_3) \varphi_{K,L}^{(r)}(x_1, x_2) + A_{IJKL}^{3,r}(x_3) \varphi_{3,KL}^{(r)}(x_1, x_2) \right], \\ \varepsilon_{I3}(\vec{x}) &= \sum_{r=0}^R \left[B_{IK}^{1,r} \varphi_K^{(r)} + B_{IL}^{2,r} \varphi_{3,L}^{(r)} + B_{IKL}^{3,r} \varphi_{K,L}^{(r)} \right], \\ \varepsilon_{33}(\vec{x}) &= \sum_{r=0}^R \left[C^{1,r} \varphi_3^{(r)}(x_1, x_2) + C_{PQ}^{2,r} \varphi_{P,Q}^{(r)}(x_1, x_2) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{1111}^{1,r} &= A_{1212}^{1,r} = x_3^r + N_{113}(x_3)rx_3^{r-1}, & A_{1221}^{1,r} &= A_{2222}^{1,r} = x_3^r + N_{223}(x_3)rx_3^{r-1}, \\
A_{1111}^{3,r} &= A_{1212}^{3,r} = x_3^r N_{113}(x_3), & A_{1221}^{3,r} &= A_{2222}^{3,r} = x_3^r N_{223}(x_3); \\
B_{11}^{1,r} &= rx_3^{r-1} \left(1 + N_{113,3}(x_3)\right) + r(r-1)x_3^{r-2}N_{113}(x_3), \\
B_{22}^{1,r} &= rx_3^{r-1} \left(1 + N_{223,3}(x_3)\right) + r(r-1)x_3^{r-2}N_{223}(x_3); \\
B_{11}^{2,r} &= rx_3^{r-1} \left(N_{113}(x_3) + N_{333}(x_3)\right) + x_3^r \left(1 + N_{113,3}(x_3)\right), \\
B_{22}^{2,r} &= rx_3^{r-1} \left(N_{223}(x_3) + N_{333}(x_3)\right) + x_3^r \left(1 + N_{223,3}(x_3)\right); \\
B_{111}^{3,r} &= B_{212}^{3,r} = x_3^r N_{311}(x_3), & B_{121}^{3,r} &= B_{222}^{3,r} = x_3^r N_{322}(x_3); \\
C^{1,r} &= rx_3^{r-1} \left(1 + N_{333,3}(x_3)\right) + r(r-1)x_3^{r-2}N_{333}(x_3), \\
C_{11}^{2,r} &= rx_3^{r-1}N_{311}(x_3) + x_3^r N_{311,3}(x_3), & C_{22}^{2,r} &= rx_3^{r-1}N_{322}(x_3) + x_3^r N_{322,3}(x_3).
\end{aligned}$$

Первая вариация интеграла по объему, входящая в функционал Лагранжа (12), записанный в терминах поля (22), имеет вид

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_V &= \sum_{r=0}^R \sum_{t=0}^R \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(C_{I3K3} B_{KN}^{1,t} [B_{IV}^{1,r} \varphi_V^{(r)} + B_{IV}^{2,r} \varphi_{3,V}^{(r)} + B_{IUV}^{3,r} \varphi_{U,V}^{(r)}] - \right. \right. \\
&- [C_{IJKL} (A_{IJSO}^{1,r} \varphi_{S,OM}^{(r)} + A_{IJSO}^{3,r} \varphi_{3,SOM}^{(r)}) + C_{33KL} (C^{1,r} \varphi_{3,M}^{(r)} + C_{PQ}^{2,r} \varphi_{P,QM}^{(r)})] A_{KLN}^{1,t} - \\
&- [C_{33KL} (A_{KLSO}^{1,r} \varphi_{S,OU}^{(r)} + A_{KLSO}^{3,r} \varphi_{3,SOU}^{(r)}) + C_{3333} (C^{1,r} \varphi_{3,U}^{(r)} + C_{PQ}^{2,r} \varphi_{P,QU}^{(r)})] C_{NU}^{2,t} + \\
&\left. + [C_{I3K3} B_{KNM}^{3,t} [B_{IV}^{1,r} \varphi_{V,M}^{(r)} + B_{IV}^{2,r} \varphi_{3,VM}^{(r)} + B_{IUV}^{3,r} \varphi_{V,UM}^{(r)}]] \right) \delta\varphi_N^{(t)} + \\
&\quad + \left([C_{IJKL} (A_{IJSO}^{1,r} \varphi_{S,OMF}^{(r)} + A_{IJSO}^{3,r} \varphi_{3,SOMF}^{(r)}) + \right. \\
&\quad \left. + C_{33KL} (C^{1,r} \varphi_{3,MF}^{(r)} + C_{PQ}^{2,r} \varphi_{P,QMF}^{(r)})] A_{KLFM}^{3,t} \right) + \\
&+ [C_{33KL} (A_{KLUV}^{1,r} \varphi_{U,V}^{(r)} + A_{KLUV}^{3,r} \varphi_{3,UV}^{(r)}) + C_{3333} (C^{1,r} \varphi_3^{(r)} + C_{PQ}^{2,r} \varphi_{P,Q}^{(r)})] C^{1,t} - \\
&- [C_{I3K3} B_{KN}^{(2,t)} [B_{IV}^{1,r} \varphi_{V,N}^{(r)} + B_{IV}^{2,r} \varphi_{3,VN}^{(r)} + B_{IUV}^{3,r} \varphi_{V,UN}^{(r)}]] \delta\varphi_3^{(t)} \Big] dx_3 dx_2 dx_1 - \\
&\quad - \sum_{t=0}^R \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_{-H/2}^{H/2} \left[\left(X_1 x_3^t + X_1 t x_3^{t-1} N_{113} - X_{3,1} x_3^t N_{311} \right) \delta\varphi_1^{(t)} + \right. \\
&\quad \left. + \left(X_2 x_3^t + X_2 N_{223} t x_3^{t-1} - X_{3,2} x_3^t N_{322} \right) \delta\varphi_2^{(t)} + \right. \\
&\quad \left. \left(X_3 x_3^t + t x_3^{t-1} N_{333} - X_{1,1} N_{113} x_3^t - X_{2,2} N_{223} x_3^t \right) \delta\varphi_3^{(t)} dx_3 dx_2 dx_1 \right].
\end{aligned} \tag{23}$$

С учетом того, что выбору подлежат $C_{IJKL}^0 = const$, точно удовлетворить вариационному уравнению $\delta\mathcal{L} = 0$ не представляется возможным. Объемные силы X_i можно записать в терминах $\varphi_k^{(r)}$:

$$\begin{aligned}
X_i = C_{ijkl}^0 v_{k,lj} = & \sum_{r=0}^R [C_{iJKL}^0 x_3^r \varphi_{K,LJ}^{(r)} + C_{i3KL}^0 r x_3^{r-1} \varphi_{K,L}^{(r)} + \\
& + C_{iJK3}^0 (r x_3^{r-1} \varphi_{K,J}^{(r)} + x_3^r \varphi_{3,KJ}^{(r)}) + C_{i3K3}^0 (r x_3^{r-1} \varphi_{3,K}^{(r)} + r(r-1) x_3^{r-2} \varphi_K^{(r)}) + \\
& + C_{iJ33}^0 x_3^{r-1} r \varphi_{3,J}^{(r)} + C_{i333}^0 r(r-1) x_3^{r-2} \varphi_3^{(r)}].
\end{aligned}$$

Это представление можно подставить в (23) и выбрать C_{IJKL}^0 из соображений минимизации $(\delta\mathcal{L})^2$: в этом случае необходимо выбрать $C_{IJKL}^0 = \langle C_{IJKL} + C_{IJ33} N_{3KL,3} \rangle$. Таким образом, упругие свойства сопутствующего тела, выбранные в работе [36], совпадают с выбранными из соображений минимизации $(\delta\mathcal{L})^2$.

2.2.2. Приближение второго порядка. Рассмотрим приближение решения задачи (16) МСФ второго порядка ($Q = 1$ в соотношении (14)). В этом случае уравнения (8) примут вид

$$\begin{aligned}
& [C_{i3mn} + C_{i3m3} N_{kmn,3}]_{,3} = 0, \\
& [C_{i3m3} N_{mkl,3} + C_{i3mi} N_{mkl}]_{,3} = C_{ii1kl}^0 - [C_{ii1m3} N_{mkl,3} + C_{ii1kl}].
\end{aligned}$$

Из совпадения кинематических и статических граничных условий исходной (16) и сопутствующей (17) задач на границах $x_1 = 0, L_1$ и $x_2 = 0, L_2$ следует, что $N_{\alpha\alpha\beta\gamma} \equiv 0$, $N_{\alpha\alpha\alpha\beta} \equiv 0$. Из совпадения статических граничных условий на лицевых поверхностях следует, что

$$\begin{aligned}
& C_{i3mn}(\pm h/2) + C_{i3k3}(\pm h/2) N_{kmn,3}(\pm h/2) = C_{i3mn}^0, \\
& x_3 = \pm h/2: \quad N_{1\alpha\alpha 1,3} = N_{2\alpha\alpha 2,3} = N_{3\alpha\alpha 3,3} = -N_{3\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, 3, \\
& \quad \quad \quad x_3 = \pm h/2: \quad N_{\beta\beta 33,3} = -N_{\beta\beta 3}, \quad \beta = 1, 2, \\
& \quad \quad \quad x_3 = \pm h/2: \quad N_{1122,3} = 0, \quad N_{2211,3} = 0, \\
& \quad \quad \quad x_3 = \pm h/2: \quad C_{33\gamma\gamma} N_{\gamma\gamma 3} = -C_{3333} N_{33\gamma\gamma,3}, \quad \gamma = 1, 2, \\
& \quad \quad \quad x_3 = \pm h/2: \quad N_{ikli_1} \Big|_{x_3=\pm h/2} = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

СФ второго порядка примут вид

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\beta\beta\alpha}(x_3) = & \int_{-H/2}^{x_3} \left[\frac{1}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)} \int_{-H/2}^z (C_{\alpha\alpha\beta\beta}^0 - C_{\alpha\alpha\beta\beta}(y) - \right. \\
& \left. - C_{\alpha\alpha 33}(y) N_{3\beta\beta,3}(y)) dy - N_{3\beta\beta}(z) \right] dz, \\
N_{\alpha\alpha\beta\beta}(x_3) = & \int_{-H/2}^{x_3} \left[\frac{1}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)} \int_{-H/2}^z (C_{\alpha\beta\alpha\beta}^0 - C_{\alpha\beta\alpha\beta}(y)) dy \right] dz, \quad \alpha = 1, 2, \\
N_{\alpha\alpha 33}(x_3) = & - \int_{-h/2}^{x_3} N_{\alpha\alpha 3}(y) dy, \quad N_{33\alpha\alpha}(x_3) = - \int_{-h/2}^{x_3} \frac{C_{33\alpha\alpha}(y)}{C_{3333}(y)} N_{\alpha\alpha 3}(y) dy.
\end{aligned} \tag{25}$$

Приведенные соотношения уточнены по сравнению с работой [36]. Свойства сопутствующего тела в случае метода второго порядка выбраны из соображений выполнения условий (24) на верхней лицевой поверхности (функции, определенные соотношениями (25), автоматически удовлетворяют граничным условиям на нижней лицевой поверхности): из этих условий подлежат выбору все компоненты тензора модулей упругости сопутствующего тела. Заметим, что в случае исходного тела с кусочно-постоянными упругими свойствами СФ первого порядка – кусочно-линейные функции поперечной координаты, а второго порядка – кусочно-параболические.

Решение тестовой задачи (16) приближается к точному при уменьшении отношения толщины к поперечным размерам пластины. Приведем результаты вычисления приближенных решений задачи (16) для ортотропных исходных пластин, нормализованные технические постоянные которых приведены в табл. 1. Размеры пластины в плане – $L \times L$, пластина нагружена поверхностными силами

$$q_3^+(x_1, x_2) = q_0 \sin(\lambda_1 x_1) \sin(\mu_1 x_2),$$

$$q_1^+(x_1, x_2) = 0, \quad q_2^\pm(x_1, x_2) = 0, \quad q_1^-(x_1, x_2) = 0, \quad q_3^-(x_1, x_2) = 0.$$

Рассмотрены пластины с отношением толщины к размерам в плане $1/4$ и $1/8$. В качестве решения сопутствующей задачи использовано высокоточное решение N.J. Pagano [43]; аналогичное решение для исходной задачи использовано в качестве контрольного. Приведем (рис. 1) графики нормализованных значений продольного перемещения $\hat{u}_1(0, L/2, x_3) = 100H^3 * E_T * u_1(0, L/2, x_3)/q_0L^4$ и напряжения $\hat{\sigma}_{11} = H\sigma_{11}(L/2, L/2, x_3)/q_0L^2$.

Табл. 1. Нормализованные технические постоянные пластины

Table 1. Normalized engineering constants of the plate

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[H/6, H/2]$	50	1	1	0.25	0.25/50	0.25/50	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/6]$	1	20	1	0.25/20	0.25	0.25/20	0.5	0.2	0.5
$[-H/2, -H/6]$	50	1	1	0.25	0.25/50	0.25/50	0.5	0.5	0.2

Заключение

Исследованы свойства структурных функций – функциональных коэффициентов, входящих в приближенное решение задачи теории упругости для неоднородного тела, построенное методом структурных функций. Данный метод основан на представлении перемещений в неоднородном теле в виде ряда по производным решения задачи теории упругости для однородного тела идентичной геометрии, подвергнутого тем же нагрузкам и закреплениям. Уравнения для определения структурных функций, которые в предыдущих работах были выведены из соображений совпадения уравнений равновесия исходной и сопутствующей задач, в данной работе получены из вариационного принципа Лагранжа. Приведено доказательство эквивалентности двух существующих подходов к вычислению структурных функций, единственности структурных функций для выбранной пары исходной и сопутствующей задач. В дополнение к описанным предыдущими исследователями отмечены следующие свойства структурных функций:

- структурные функции зависят от упругих свойств сопутствующего тела и обращаются в нуль в тривиальном случае,
- структурные функции зависят от граничных условий смешанной краевой задачи,
- структурные функции не зависят от точности решения сопутствующей задачи.

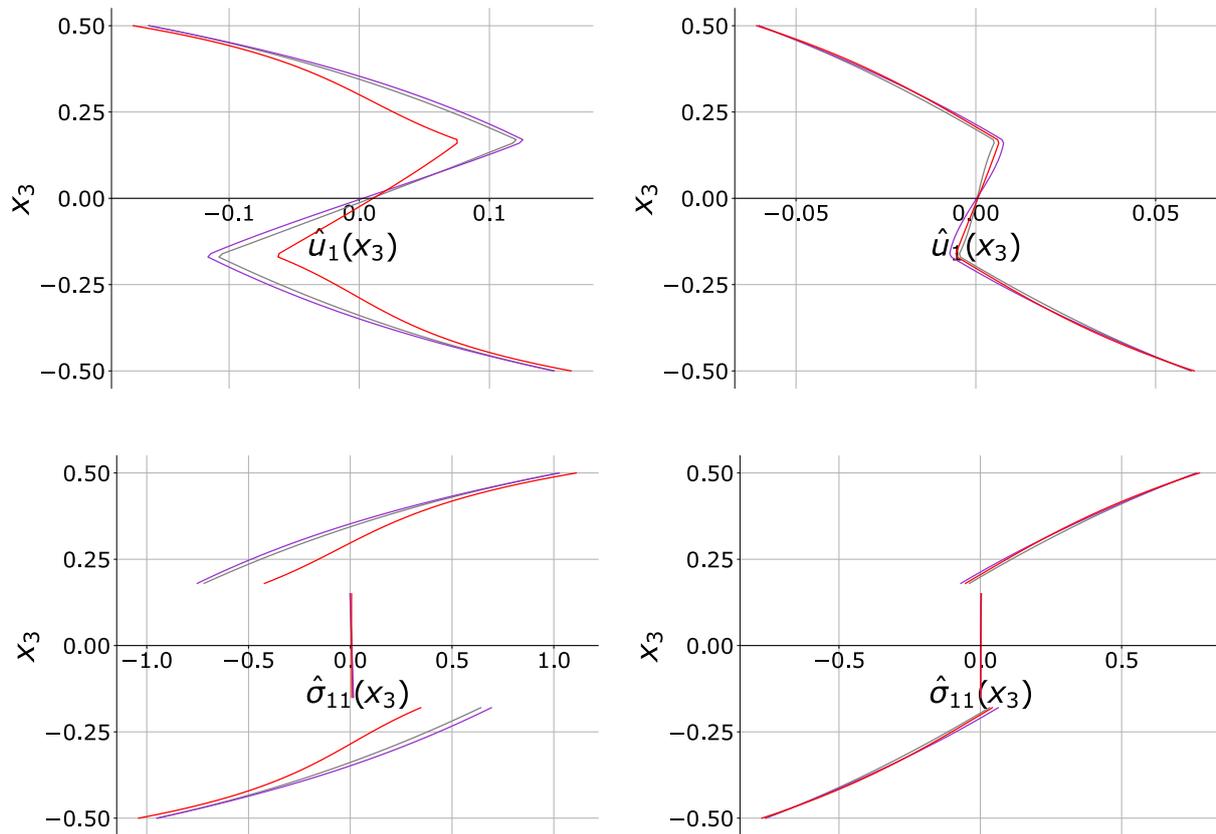


Рис. 1. Результаты вычисления приближенных решений задачи (16) для пластины с упругими свойствами (табл. 1). Верхние рисунки представляют продольные напряжения $\hat{\sigma}_{11}(L/2, L/2, x_3)$, нижние – перемещения $\hat{u}_1(0, L/2, x_3)$. Левые иллюстрации относятся к пластине с $H/L = 1/4$, правые – $H/8$. Сиреневые кривые – МСФ-приближение первого порядка, серые – второго порядка, красные – контрольное решение N.J. Pagano

Fig. 1. Approximate solutions to problem (16) for a plate with elastic properties (see table). The upper graphs display longitudinal stresses $\hat{\sigma}_{11}(L/2, L/2, x_3)$, the bottom graphs show displacements $\hat{u}_1(0, L/2, x_3)$. The left and right graphs correspond to a plate with a span-to-depth ratio $H/L = 1/4$ and $H/8$, respectively. Purple curves – the first-order structural functions method approximation, gray curves – the second-order approximation, red curves – the classical solution by N.J. Pagano

Определено понятие порядка метода – наибольшего порядка производных перемещений в сопутствующем теле, входящих в приближенное решение исходной задачи. Показано, что использование метода порядка $Q + 1$ оправдано в сочетании с приближенным решением сопутствующей задачи, позволяющим найти производные деформаций порядка $Q + 1$ по всем координатам. В качестве примера применения метода рассмотрена задача о нагружении слоистой прямоугольной пластины, свободно опертой на контуре: приведены

приближенные решения этой задачи методом структурных функций первого и второго порядков.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Горбачев В.И. Вариант метода осреднения для решения краевых задач неоднородной упругости: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Москва, 1991.
2. Горбачев В.И. Об эффективных коэффициентах упругости неоднородного тела // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 115–126. <https://doi.org/10.31857/S05723299000703-3>.
3. Горбачев В.И. Дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами в механике неоднородных тел // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 3. С. 114–121. <https://dx.doi.org/10.31857/S0572329920030071>.
4. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1984. 336 с.
5. Voigt W. Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper // Ann. Phys. 1889. Bd. 274, H. 12. S. 573–587. <https://doi.org/10.1002/andp.18892741206>.
6. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // Z. Angew. Math. Mech. 1929. Bd. 9, H. 1. S. 49–58. <https://doi.org/10.1002/zamm.19290090104>.
7. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Биомеханика прочности волокнистых композитов. 2018. М.: Физ.-матем. лит-ра. 328 с.
8. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals // J. Mech. Phys. Solids. 1963. V. 11, No 2. P. 127–140. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(63\)90060-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7).
9. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metall. 1973. V 21, No 5. P. 571–574. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(73\)90064-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(73)90064-3).
10. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proc. R. Soc. London, Ser. A. 1957. V. 241, No 1226. P. 376–396. <https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0133>.
11. Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А. Интегральные формулы Эшелби в градиентной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 182–192. <https://elibrary.ru/item.asp?id=15130462>.
12. Соляев Ю.О. Самосогласованный метод Кренера для оценки эффективных констант градиентной теории упругости для поликристаллов // XIII Всероссийск. съезд по теор. и прикл. механ.: сб. тез. докл. в 4 т. Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 г. Т. 3. СПб.: Политех-Пресс, 2023. С. 1001–1002.
13. Kriven G., Lurie S.A., Thang T.Q., Orekhov A.A. Strength, stiffness and damping properties of whiskerized fiber composites with longitudinal shear // Compos.: Mech., Comput., Appl. 2021. V. 12, No 4. P. 1–22. <https://doi.org/10.1615/CompMechComputApplIntJ.2021039237>.

14. *Lurie S.A., Kriven G.I.* A study of the effective properties of compact bone tissues // *Tech. Phys. Lett.* 2024. V. 50, No 3. P. 268–275. <https://doi.org/10.1134/S1063785024700378>.
15. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек // *Вестн. ТГТУ.* 2005. Т. 11, № 2. С. 439–448.
16. *Murakami H.* Laminated composite plate theory with improved in-plane responses // *J. Appl. Mech.* 1986. V. 53, No 3. P. 661–666. <https://doi.org/10.1115/1.3171828>.
17. *Маковский С.В.* Динамические характеристики модифицированных волокнистых композитов с вискеризованными волокнами: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2020.
18. *Муйземнек А.Ю., Иванова Т.Н., Карташова Е.Д.* Сопоставление результатов экспериментального и расчетного определения эффективных характеристик упругих свойств полимерных слоистых композитов из угле- и стеклотканей // *Вестн. ПНИПУ. Механ.* 2021. № 2. С. 88–105. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.09>.
19. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
20. *Rodríguez-Ramos R., Otero J.A., Cruz-González O.L., Guinovart-Díaz R., Bravo-Castillero J., Sabina F.J., Padilla P., Lebon F., Sevostianov I.* Computation of the relaxation effective moduli for fibrous viscoelastic composites using the asymptotic homogenization method // *Int. J. Solids Struct.* 2020. V. 190. P. 281–290. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.11.014>.
21. *Димитриенко Ю.И., Каримов С.Б., Димитриенко А.Ю.* Моделирование конечных деформаций композиционных материалов на основе универсальных моделей A_n и метода асимптотического осреднения // *Матем. моделир. и числ. методы.* 2024. № 2. С. 17–34. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2024-2-1734>.
22. *Савенкова М.И.* Применение метода осреднения к материалам с физически нелинейными свойствами: автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. Москва, 2013.
23. *Шешенин С.В., Скопцов К.А.* Теория пластин, основанная на методе асимптотических разложений // *Матем. моделир. и числ. методы.* 2014. № 2. С. 49–61.
24. *Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О.* Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости // *Инж. журн.: наука и инновации.* 2013. № 7 (19). С. 17. <https://engjournal.bmstu.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html>.
25. *Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В.* Асимптотическая теория типа Тимошенко для тонких многослойных пластин // *Матем. моделир. и числ. методы.* 2018. № 1 (17). С. 16–40. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2018-1-1640>.
26. *Власов А.Н.* Сведение уравнения теории упругости со случайными коэффициентами на области с периодической структурой к усредненному уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами. Эффективный тензор жесткости // *МКМК.* 2021. Т. 27, № 3. С. 309–322. https://doi.org/10.33113/mkmc.ras.2021.27.03.309_323.02.
27. *Горбачев В.И.* Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных тел // *Вычисл. механ.* 1991. № 2. С. 61–76.
28. *Горбачев В.И.* Динамические задачи механики композитов // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2011. Т. 75, № 1. С. 117–122.

29. Горбачев В.И., Емельянов А.Н. Осреднение уравнений моментной теории упругости неоднородного тела // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 1. С. 95–107. <https://elibrary.ru/item.asp?id=21404928>.
30. Горбачев В.И. Инженерная теория сопротивления неоднородных стержней из композиционных материалов // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2016. № 6. С. 56–72. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-6-56-72>.
31. Горбачев В.И. Инженерная теория деформирования неоднородных пластин из композиционных материалов // МКМК. 2016. Т. 22, № 4. С. 585–601.
32. Горбачев В.И., Гулин В.В. Точные решения некоторых задач теории упругости о равновесии неоднородной по ширине анизотропной полосы // Композ. и нанострукт. 2021. Т. 13, № 3–4. С. 120–126.
33. Соляев Ю.О., Горбачев В.И. Сопоставление методов Мори–Танака и Горбачева–Победри в задаче определения эффективных свойств композитов с пьезоактивными сферическими включениями // МКМК. 2019. Т. 25, № 1. С. 57–75. https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2019.25.01.057_075.05.
34. Kabanova L.A. The first-order structural functions method solution to the simply supported layered plate bending problem // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, No 7. P. 1866–1877. <https://doi.org/10.1134/s199508022210016x>.
35. Кабанова Л.А. Сопоставление приближений решения задачи об изгибе линейно-упругой слоистой пластины, полученных методом структурных функций // Чебышевский сб. 2022. Т. 23, № 4 (85). С. 211–232. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-211-232>.
36. Кабанова Л.А., Романов А.В. Сопоставление решений квазистатической задачи о нагружении пластины, построенных методом структурных функций и методом конечных элементов // Чебышевский сб. 2024. Т. 25, № 4. С. 175–196. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2024-25-4-175-196>.
37. Новацкий В. Теория упругости. 1975. М.: Мир. 872 с.
38. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. 1998. М.: Наука. 712 с.
39. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A. On refined theories of beams, plates, and shells // J. Compos. Mater. 1992. V. 26, No 4. P. 546–557. <https://doi.org/10.1177/002199839202600405>.
40. Reddy J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. Boca Raton, FL: CRC Press, 2006. 568 p. <https://doi.org/10.1201/9780849384165>.
41. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: A unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking // Arch. Comput. Methods Eng. 2003. V. 10, No 3. P. 215–296. <https://doi.org/10.1007/BF02736224>.
42. Васильев В.В. Теория тонких упругих пластин – история и современное состояние проблемы // Изв. РАН. МТТ. 2024. № 2. С. 3–39. <https://doi.org/10.31857/S1026351924060013>.
43. Pagano N.J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // J. Compos. Mater. 1970. V. 4, No 1. P. 20–34. <https://doi.org/10.1177/002199837000400102>.

References

1. Gorbachev V.I. A homogenization method for boundary value problems of nonhomogeneous elasticity. *Extended Abstract of Dr. Sci. (Physics and Mathematics) Diss.* Moscow, 1991. (In Russian)
2. Gorbachev V.I. Effective elastic coefficients of an inhomogeneous solids. *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, no. 4, pp. 454–463. <https://doi.org/10.3103/S0025654418040118>.
3. Gorbachev V.I. Differential equations with variable coefficients in the mechanics of inhomogeneous bodies. *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 3, pp. 396–402. <http://dx.doi.org/10.3103/S0025654420030061>.
4. Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 1984. 336 p. (In Russian)
5. Voigt W. Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. *Ann. Phys.*, 1889, Bd. 274, H. 12, S. 573–587. <https://doi.org/10.1002/andp.18892741206>. (In German)
6. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1929, Bd. 9, H. 1, S. 49–58. <https://doi.org/10.1002/zamm.19290090104>. (In German)
7. Polilov A.N., Tatus' N.A. *Biomekhanika prochnosti voloknistykh kompozitov* [Strength Biomechanics of Fibrous Composites]. Moscow, Fiz.-Mat. Lit., 2018. 328 p. (In Russian)
8. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals. *J. Mech. Phys. Solids*, 1963, vol. 11, no. 2, pp. 127–140. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(63\)90060-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7).
9. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.*, 1973, vol. 21, no. 5, pp. 571–574. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(73\)90064-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(73)90064-3).
10. Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1957, vol. 241, no. 1226, pp. 376–396. <https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0133>.
11. Volkov-Bogorodskii D.B., Lurie S.A. Eshelby integral formulas in gradient elasticity. *Mech. Solids*, 2010, vol. 45, no. 4, pp. 648–656. <https://doi.org/10.3103/S0025654410040138>.
12. Solyaev Yu.O. Kröner's self-consistent method to determine the effective elasticity constants of polycrystals. *XIII Vserossiisk. s'ezd po teor. i prikl. mekhan.: sb. tez. dokl. Sankt-Peterburg, 21–25 avgusta 2023 g.* [Proc. XIII All-Russ. Conf. on the Theoretical and Applied Mechanics. St. Petersburg, August 21–25, 2023]. Vol. 3. St. Petersburg, Politekh-Press, 2023, pp. 1001–1002. (In Russian)
13. Kriven G., Lurie S.A., Thang T.Q., Orekhov A.A. Strength, stiffness and damping properties of viscous fiber composites with longitudinal shear. *Compos.: Mech., Comput., Appl.*, 2021, vol. 12, no. 4, pp. 1–22. <https://doi.org/10.1615/CompMechComputApplIntJ.2021039237>.
14. Lurie S.A., Kriven G.I. A study of the effective properties of compact bone tissues. *Tech. Phys. Lett.*, 2024, vol. 50, no. 3, pp. 268–275. <https://doi.org/10.1134/S1063785024700378>.

15. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. Trends in the development of the theory of elastic multilayer plates and shells. *Vestn. TGTU*, 2005, vol. 11, no. 2, pp. 439–448. (In Russian)
16. Murakami H. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. *J. Appl. Mech.*, 1986, vol. 53, no. 3, pp. 661–666. <https://doi.org/10.1115/1.3171828>.
17. Makovskii S.V. Dynamic properties of modified fiber-reinforced composites with viscose fibers. *Extended Abstract of Cand. Sci. (Engineering) Diss.* Moscow, 2020. (In Russian)
18. Muizemnek A.Yu., Ivanova T.N., Kartashova E.D. A comparison of the experimental and numerical data on the effective characteristics of elastic properties in layered polymer composites from carbon and glass fibers. *Vestn. PNIPU. Mekh.*, 2021, no. 2, pp. 88–105. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.09>. (In Russian)
19. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Process Homogenization in Nonhomogeneous Media]. Moscow, Nauka, 1984. 352 p. (In Russian)
20. Rodríguez-Ramos R., Otero J.A., Cruz-González O.L., Guinovart-Díaz R., Bravo-Castillero J., Sabina F.J., Padilla P., Lebon F., Sevostianov I. Computation of the relaxation effective moduli for fibrous viscoelastic composites using the asymptotic homogenization method. *Int. J. Solids Struct.*, 2020, vol. 190, pp. 281–290. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.11.014>.
21. Dimitrienko Yu.I., Karimov S.B., Dimitrienko A.Yu. Modeling of finite deformations of composite materials based on universal A_n models and the asymptotic averaging method. *Mat. Model. Chislennye Metody*, 2024, no. 2, pp. 17–34. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2024-2-1734>. (In Russian)
22. Savenkova M.I. Using homogenization method for materials with physically nonlinear properties. *Extended Abstract of Cand. Sci. (Physics and Mathematics) Diss.* Moscow, 2013. (In Russian)
23. Sheshenin S.V., Skoptsov K.A. Plate theory based on the method of asymptotic expansion. *Mat. Model. Chislennye Metody*, 2014, no. 2, pp. 49–61. (In Russian)
24. Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. A comparative analysis of asymptotic theory of multilayer composite plates and three-dimensional theory of elasticity. *Inzh. Zh.: Nauka Innovatsii*, 2013, no. 7 (19), p. 17. URL: <https://engjournal.bmstu.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html>. (In Russian)
25. Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V. Asymptotic Timoshenko-type theory of thin multilayered plates. *Mat. Model. Chislennye Metody*, 2018, no. 1 (17), pp. 16–40. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2018-1-1640>. (In Russian)
26. Vlasov A.N. Reduction of the elasticity equation with random coefficients on a domain with periodic structure to a homogenized elasticity equation with constant coefficients. Effective stiffness tensor. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 309–322. https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2021.27.03.309_323.02. (In Russian)
27. Gorbachev V.I. Green tensor method for solving boundary value problems of the theory of elasticity for inhomogeneous media. *Vychisl. Mekh.*, 1991, no. 2, pp. 61–76. (In Russian)
28. Gorbachev V.I. Dynamic problems of composite mechanics. *Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.*, 2011, vol. 75, no. 1, pp. 110–115. <https://doi.org/10.3103/S1062873810121068>.

29. Gorbachev V.I., Emel'yanov A.N. Homogenization of the equations of the Cosserat theory of elasticity of inhomogeneous bodies. *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 1, pp. 73–82. <https://doi.org/10.3103/S0025654414010099>.
30. Gorbachev V.I. Engineering resistance theory of heterogeneous rods made of composite materials. *Vestn. MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Estestv. Nauki*, 2016, no. 6, pp. 56–72. <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-6-56-72>. (In Russian)
31. Gorbachev V.I. The engineering theory of nonuniform composite plate strain. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2016, vol. 22, no. 4, pp. 585–601. (In Russian)
32. Gorbachev V.I., Gulin V.V. Exact solutions of some elasticity problems for the equilibrium of an anisotropic band with inhomogeneous width. *Kompoz. Nanostrukt.*, 2021, vol. 13, nos. 3–4, pp. 120–126. (In Russian)
33. Solyaev Yu.O., Gorbachev V.I. Comparison of the Mori–Tanaka and Gorbachev–Pobedrya methods in the problem of determining the effective properties of composites with piezoelectric spherical inclusions. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 57–75. https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2019.25.01.057_075.05. (In Russian)
34. Kabanova L.A. The first-order structural functions method solution to the simply supported layered plate bending problem. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 7, pp. 1866–1877. <https://doi.org/10.1134/s199508022210016x>.
35. Kabanova L.A. Comparison of structural functions method approximations of the solution of a linear elastic layered plate bending problem. *Chebyshevskii Sb.*, 2022, vol. 23, no. 4 (85), pp. 211–232. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-211-232>. (In Russian)
36. Kabanova L.A., Romanov A.V. Comparison of approximate solutions to the quasi-static plate loading problem, obtained by the structural functions method and the finite element method. *Chebyshevskii Sb.*, 2024, vol. 25, no. 4, pp. 175–196. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2024-25-4-175-196>. (In Russian)
37. Nowacki W. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Mir, 1975. 872 p. (In Russian)
38. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of Deformable Solids]. Moscow, Nauka, 1998. 712 p. (In Russian)
39. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A. On refined theories of beams, plates, and shells. *J. Compos. Mater.*, 1992, vol. 26, no. 4, pp. 546–557. <https://doi.org/10.1177/002199839202600405>.
40. Reddy J.N. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. Boca Raton, FL, CRC Press, 2006. 568 p. <https://doi.org/10.1201/9780849384165>.
41. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: A unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Arch. Comput. Methods Eng.*, 2003, vol. 10, no. 3, pp. 215–296. <https://doi.org/10.1007/BF02736224>.
42. Vasiliev V.V. The theory of thin elastic plates – history and current state of the problem. *Mech. Solids*, 2024, vol. 59, no. 2, pp. 581–604. <https://doi.org/10.1134/S0025654424700286>.
43. Pagano N.J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *J. Compos. Mater.*, 1970, vol. 4, no. 1, pp. 20–34. <https://doi.org/10.1177/002199837000400102>.

Информация об авторах

Любовь Александровна Кабанова, младший научный сотрудник, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

E-mail: *liubov.kabanova@math.msu.ru*

Author Information

Liubov A. Kabanova, Junior Researcher, Moscow State University

E-mail: *liubov.kabanova@math.msu.ru*

Поступила в редакцию 6.02.2025

Принята к публикации 12.02.2025

Received February 6, 2025

Accepted February 12, 2025