ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ
УДК 532.526.2
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.227-243

Аналитическая аппроксимация решения задачи Блазиуса в пограничном слое на плоской пластине

В.М. Зубарев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, г. Москва, Россия

zubarev@ipmnet.ru

Аннотация

В последние годы изучение устойчивого потока вязкой жидкости приобрело значительный интерес из-за его обширного инженерного применения. В статье рассмотрена классическая задача из теории вязкого ламинарного стационарного пограничного слоя несжимаемой ньютоновской жидкости на плоской тонкой пластине (задача Блазиуса). Методом пристрелки совместно с численной схемой Рунге–Кутты четвертого порядка точности на большом интервале для очень мелкой сетки получено конечно-разностное решение этой задачи. Численные результаты сопоставлены с известными аналогичными расчетными тестовыми данными. Проведена оценка функции Блазиуса $f(\eta)$ и ее двух производных B-сплайном третьего порядка, получено отличное совпадение с расчетами. Нелинейным методом наименьших квадратов (НМНК) установлена новая аналитическая корреляционная зависимость для функции Блазиуса, приближающая результаты проведенных расчетов в широком диапазоне автомодельной переменной η. Дано сравнение значений функции f, первой и второй ее производных с точными данными. Эти результаты находятся в полном согласии с ранее полученными решениями. Профиль продольной скорости в пограничном слое, определенный через производную f' функции Блазиуса, может быть использован в качестве начального профиля скорости при численном моделировании турбулентных плоских и трехмерных течений несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: ламинарный пограничный слой, стационарное течение, несжимаемая ньютоновская жидкость, тонкая плоская пластина, задача Блазиуса, B-сплайн, аналитическая аппроксимация, нелинейный метод наименьших квадратов (НМНК)

Благодарности. Исследование выполнено по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012500440-9).

Для цитирования: *Зубарев В.М.* Аналитическая аппроксимация решения задачи Блазиуса в пограничном слое на плоской пластине // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 227–243. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.227-243.

ORIGINAL ARTICLE
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.227-243

Analytical approximation of solutions to the Blasius problem in the boundary layer on a flat plate

V.M. Zubarev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

zubarev@ipmnet.ru

Abstract

In recent years, the steady-state flow of viscous fluids has attracted considerable research interest due to its broad engineering applications. This study provides new insights into the classical problem of the theory of the viscous laminar stationary boundary layer of an incompressible Newtonian fluid on a thin flat plate (Blasius problem). A finite-difference solution to the Blasius problem was obtained by the shooting method in combination with the Runge–Kutta numerical scheme of the fourth-order accuracy over a large interval for a very fine mesh. The numerical results were validated against similar known data of calculation tests. The Blasius function $f(\eta)$ and its first two derivatives were approximated using the third-order B-spline. Excellent agreement with the results of known calculations was demonstrated. A new analytical correlation for the Blasius function, which approximates the results of the calculations in a wide range of the self-similar variable η, was established by the nonlinear least squares method (NLLSM). The values of the function f and its first- and second-order derivatives were compared with known data. The results align with previous solutions. The longitudinal velocity profile in the boundary layer, defined through the derivative f' of the Blasius function, can serve as the initial velocity profile in the numerical modeling of turbulent flat and three-dimensional flows of an incompressible fluid.

Keywords: laminar boundary layer, steady-state flow, incompressible Newtonian fluid, thin flat plate, Blasius problem, B–spline, analytical approximation, nonlinear least squares method (NLLSM)

Acknowledgments. This study was performed as part of the state assignment (state registration no. 124012500440-9).

For citation: Zubarev V.M. Analytical approximation of solutions to the Blasius problem in the boundary layer on a flat plate. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 227–243. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.227-243. (In Russian)

Введение

В начале прошлого века Л. Прандтль [1,2] заложил основы теории пограничного слоя. Эта теория нашла свое основное применение при расчете сопротивления трения, которое действует на тело при его перемещении в жидкости, например, сопротивления крыла самолета, лопасти турбины или судна. Двумерный поток над фиксированной непроницаемой поверхностью создает пограничный слой, когда частицы движутся медленнее вблизи поверхности, чем вблизи свободного потока. Эта проблема теории пограничного слоя вызвала интерес у видных ученых. Задача Блазиуса – простейшая задача нелинейного пограничного слоя. Огромное количество авторов исследовало различные аспекты этой проблемы. Определение движения жидкости в области, близкой к поверхности пластины, как раз и называется проблемой или задачей Блазиуса [3], которая стала предметом большого интереса математиков и физиков. Ей посвящены целые главы в монографиях и учебниках по теории пограничного слоя [3–9], а также множество публикаций.

В 1908 году Г. Блазиус вывел уравнение (называемое в литературе уравнением Блазиуса) с использованием методики преобразования подобия [10] для пограничного слоя Прандтля (без градиента давления, давление p постоянно). Преобразование подобия было использовано для сведения параболической системы уравнений в частных производных к одному обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению третьего порядка.

В работе [11] доказаны существование и единственность решения этой первоначальной задачи в частных производных. Вопросы единственности решения задачи Блазиуса рассматривались также в [12, 13].

Для решения названного выше уравнения разными авторами было использовано много способов или методик. Первое аналитическое решение этого уравнения было предложено Г. Блазиусом, который использовал формальное решение в виде ряда в окрестности стенки и асимптотическое расширение для больших значений автомодельной переменной η. Ряд Блазиуса сходится в области $|\eta| \leq 5.690$. В 1912 году К. Топфер [14] пересмотрел работу Блазиуса и численно решил уравнение с начальными условиями. Наконец, более точное численное решение уравнения Блазиуса было построено Л. Ховартом [15], который составил классическую таблицу значений функции Блазиуса f и двух ее производных f', f'' с пятью знаками после запятой. Им приведены данные расчета величины η в сорока пяти точках в диапазоне $0 \leq \eta \leq 8.8$, которые использованы ниже для сравнения с результатами, полученными в настоящей работе.

Известно много методов приближения функции Блазиуса $f(\eta)$. Некоторые аналитические подходы оказались полезными при решении уравнения пограничного слоя, например, метод вариационной итерации [16–19], метод разложения Адомиана [20] и метод гомотопического анализа (метод продолжения по параметру, или деформационный метод) [21], спектральные методы, основанные на ортогональных функциях [22], B-сплайновые аппроксимации [23]. Применимость различных методов проверялась на хорошо известной задаче Блазиуса много раз (см. обзоры [24, 25]). Однако аналитические методы ограничены в своем применении и могут использоваться только в простых системах с несколькими уравнениями.

Имеются также другие обобщения задачи Блазиуса, например, для плоской пластины в неньютоновской среде; для жидкости с учетом влияния термозависимой вязкости; для пластины с массопереносом как за счет всасывания, так и за счет вдува.

Более общее уравнение Фолькнера – Скан [26, 27] описывает устойчивый двумерный ламинарный пограничный слой, который образуется на клине, – течение, в котором пластина не параллельна потоку. Здесь имеется приложенный градиент давления по длине пластины. Это является обобщением задачи Блазиуса для плоской пластины, в которой градиент давления вдоль пластины равен нулю. Такие случаи были изучены многими исследователями.

Численные решения с использованием компьютерного программного обеспечения и алгоритмов широко распространены в инженерных приложениях, относящихся к механике жидкости. Известные системы компьютерной алгебры (символьных вычислений) – математические пакеты Maple [28, 29], Matlab [30, 31], Mathematica [21, 32] и другие – способны решать такие краевые задачи.

Стандартным численным способом решения двухточечных граничных задач является метод стрельбы, который устраняет проблему, возникающую с граничным условием на бесконечности $\eta \to \infty$. Другие численные подходы использовали метод конечных разностей [33], предиктора – корректора [34], модифицированный предиктор – корректор, искусственную прямую нейронную сеть [35] и т. д. Их авторы изучали указанное уравнение в основном для использования в качестве теста оценки точности для новых алгоритмов и методов решения нелинейных дифференциальных уравнений с граничными условиями.

Возрастает также интерес ученых и инженеров к поиску приближенных аналитических представлений функции Блазиуса $f(\eta)$ и ее производных f', f'' [29, 36].

1. Постановка задачи

Система уравнений двумерного ламинарного пограничного слоя несжимаемой ньютоновской жидкости совместно с начальными и граничными условиями представлена, например, в [3–9, 37, 38]. В настоящем исследовании при решении классической задачи Блазиуса о пограничном слое на плоской пластине использован численный подход, основанный на алгоритме стрельбы со схемой Рунге – Кутты четвертого порядка точности на подробной сетке с большим количеством точек. Проведена аппроксимация B-сплайном функции Блазиуса f, рассчитанной численно, оценены также производные f' и f''. Применен аналитический подход при оценке и подборе новой корреляции на основе данных для функции f, полученных численно методом НМНК.

2. Математическая модель

Условная схема течения динамического ламинарного пограничного слоя при обтекании несжимаемой жидкостью плоской пластины (задача Блазиуса) приведена на рис. 1.

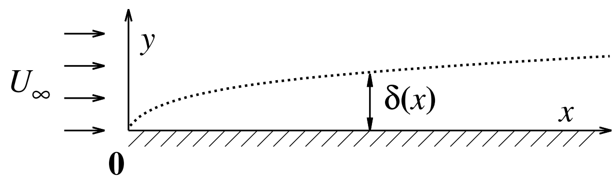

Рис. 1. Ламинарный пограничный слой при обтекании несжимаемой жидкостью плоской пластины (задача Блазиуса); x, y – ортогональные декартовые координаты; U_∞ – скорость набегающего потока; δ – толщина пограничного слоя

Fig. 1. Laminar boundary layer for incompressible fluid flow around a flat plate (Blasius problem); x, y – orthogonal Cartesian coordinates; U_∞ – incoming flow velocity; δ – boundary layer thickness

Плоское стационарное движение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости может быть описано уравнениями Навье – Стокса в приближении пограничного слоя с высоким числом Рейнольдса и представлено в виде [4, 37, 38]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{2}$$

Здесь и далее обозначения совпадают с общепринятыми: (1) – уравнение неразрывности и (2) – уравнение импульсов в проекции на ось x; x, y – ортогональные декартовые координаты, где x – координата вдоль поверхности, отсчитываемая от передней кромки пластины, y является нормальным направлением к стенке; соответствующие компоненты скорости (продольная и нормальная) – u и v; p – среднее статическое давление, которое зависит только от x и не зависит от координаты y; ρ – плотность жидкости; ν – кинематический коэффициент молекулярной вязкости жидкости; U_∞ – скорость набегающего потока.

3. Граничные условия

В качестве граничных условий для уравнений (1) и (2) заданы условия прилипания и непротекания на стенке

$$y = 0: \quad u = 0, \quad v = 0.$$

На внешней границе пограничного слоя имеем

$$y \to \infty: \quad u \to U_e(x),$$

где U_e – скорость основного потока.

Если ввести функцию тока ψ и перейти к переменным Мизеса x и ψ, как в работе [10],

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

получим, что уравнение неразрывности удовлетворится автоматически. Подстановка в уравнение импульсов (2) дает

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}.$$

Для задачи внешнего обтекания стационарным свободным потоком со скоростью U_∞ граничными условиями уравнения третьего порядка будут

$$\begin{aligned} &y = 0, \quad -\infty < x < +\infty: \quad \psi = 0,\\ &y = 0, \quad 0 \le x \le L: \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,\\ &y \to +\infty, \quad 0 \le x \le L: \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \to U_e(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение Блазиуса имеет вид

$$f'''(\eta) + 0.5f(\eta)f''(\eta) = 0, \quad \eta \ge 0, \tag{4}$$

где f – безразмерная функция тока, $f = \psi/\sqrt{U_\infty \nu x}$; η – переменная подобия, определяемая как $\eta = y\sqrt{U_\infty/(\nu x)}$; штрих обозначает дифференцирование по η; $\bar{u} = u/U_\infty = f'$ – безразмерная продольная скорость в пограничном слое.

Граничные условия для этого уравнения можно выразить в виде

$$\begin{gathered} \eta = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \\ \eta \to +\infty, \quad f' = 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Функция Блазиуса f является решением простой нелинейной задачи пограничного слоя – обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка при $\eta \subseteq [0, \infty]$. Производная $f'(x)$ дает профиль скорости в пограничном слое на половине бесконечного интервала. Имеем двухточечную краевую задачу (4), (5), описывающую стационарный плоский поток вязкой жидкости вдоль пластины. Отметим, что исходная задача (4) рассматривается на полубесконечном интервале.

4. Результаты численного моделирования

Краевая задача Блазиуса (4), (5) решалась численно методом пристрелки с использованием схемы Рунге–Кутты четвертого порядка точности на интервале $\eta \subseteq [0, 40]$. Число точек вычисления по координате η было равно 1001 (расчет *2*). Функция f, включая ее первую f' и вторую f'' производные, представлены на рис. 2 в области $0 \leq \eta \leq 10$. Здесь же для сравнения приведены данные Ховарта [15] (точки *1*) из работы [4]. Видно, что результаты расчетов хорошо согласуются с решением Ховарта.

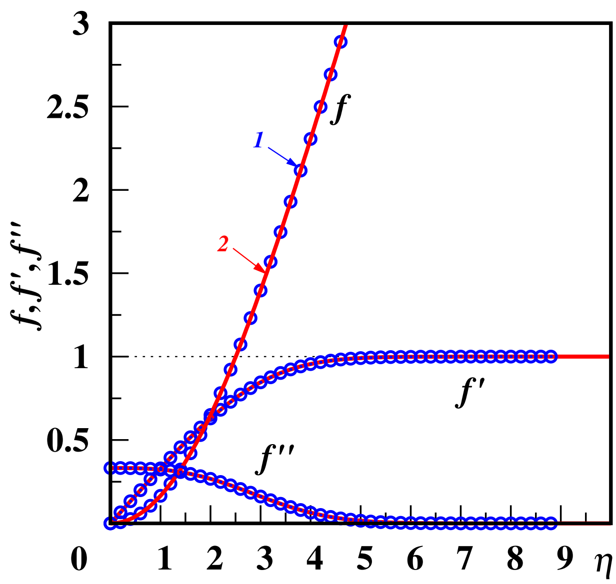

Рис. 2. График функции Блазиуса и ее производных f, f' и f'' для $0 \leq \eta \leq 10$: *1* – данные Ховарта из работы [4]; *2* – расчет для задачи Блазиуса (4) и (5)

Fig. 2. Graph of the Blasius function and its derivatives f, f', and f'' for $0 \leq \eta \leq 10$: *1* – Howarth's data from [4]; *2* – calculation of the Blasius problem (4) and (5)

Функция $f(\eta)$ была аппроксимирована B-сплайном третьего порядка [39], с количеством точек 2001 на полубесконечном интервале $\eta \subseteq [0, 40]$. B-сплайн, как видно из графика, точно проходит через каждую расчетную точку, правильно вычисляет первую $f'(\eta)$

и вторую $f''(\eta)$ производные. Кубический сплайн является гладким в первой производной и непрерывным во второй производной. Результаты расчетов показаны на рис. 3 для $0 \leq \eta \leq 10$. Для удобства восприятия отмечена каждая десятая точка.

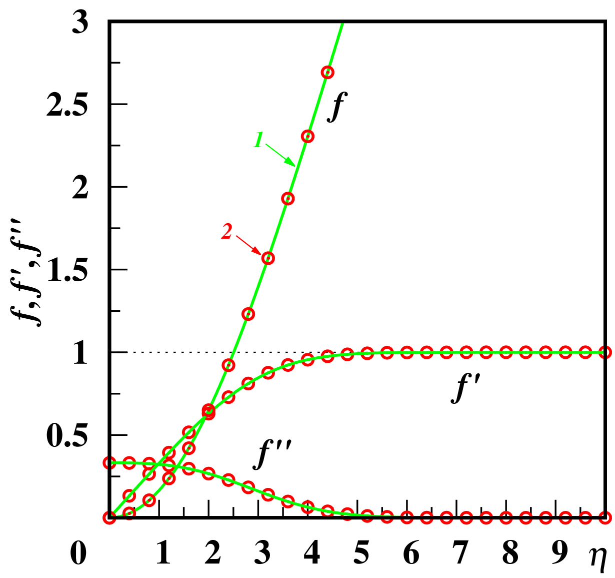

Рис. 3. График функции Блазиуса $f(\eta)$ и ее производных $f'(\eta)$ и $f''(\eta)$ для $0 \leq \eta \leq 10$: *1* – аппроксимация B-сплайном; *2* – расчет для задачи Блазиуса (4) и (5)

Fig. 3. Graph of the Blasius function $f(\eta)$ and its derivatives $f'(\eta)$ and $f''(\eta)$ for $0 \leq \eta \leq 10$: *1* – B-spline approximation; *2* – calculation of the Blasius problem (4) and (5)

В результате математической обработки с помощью алгоритма Левенберга–Марквардта для НМНК предложена новая аппроксимация функции $f(\eta)$ от нормированной координаты η. Функция f представлена в параметрическом виде – в виде рациональной дроби от отрезков рядов Фурье – в интервале $[-\pi, \pi]$ изменения параметра t:

$$f(t) = \Big(a_0 + \sum_1^5 (a_i \cos(i\,t) + b_i \sin(i\,t))\Big) \Big/ \Big(c_0 + \sum_1^5 (c_i \cos(i\,t) + d_i \sin(i\,t))\Big), \tag{6}$$
$$\eta(t) = -40 + 80(t+\pi)/(2\pi), \quad t \subseteq [-\pi, \pi].$$

Соответствующие коэффициенты определены из условия минимизации различий между рассчитанными данными и значениями, полученными с использованием аналитического выражения. Видно, что приближенное аналитическое решение, полученное настоящим способом, имеет хорошую точность аппроксимации во всем интервале. Значения коэффициентов в формуле (6) приведены в табл. 1.

Рисунки 4–7 иллюстрируют функцию Блазиуса и ее производные. График функции $f(\eta)$ представлен на рис. 4 для $0 \leq \eta \leq 40$. Здесь кривая *2* показывает аппроксимацию, полученную по формуле (6), точки *1* – это результаты настоящих численных расчетов задачи Блазиуса (4) и (5) (для удобства восприятия дана каждая сороковая точка). Независимая переменная η дискретизирована в диапазоне $[0, 40]$ с шагом 0.04. Величина достоверности аппроксимации $R^2 = 0.999999999999898997$. Стандартная ошибка равна $3.68396324464614181 \times 10^{-06}$. Здесь же приведен график $f(\eta)$ (кривая *3*), построенный интерполяционным полиномом из работы [29], который получен при помощи пакета Maple

Табл. 1. Значения коэффициентов
Table 1. Values of approximation coefficients

a_0	35.5396693506857453	c_0	1
a_1	–54.4634814646330042	c_1	–1.47476509075902279
b_1	1.00944581347068968	d_1	0.32461330353516935
a_2	23.760694568625368	c_2	0.562706142200476372
b_2	–1.74228631165980711	d_2	–0.300985808076688625
a_3	–5.23296629210679103	c_3	–0.0841390693832584640
b_3	1.27092806874448022	d_3	0.106963357320887097
a_4	0.382490992576368006	c_4	–0.00302986415448399835
b_4	–0.350925233215430188	d_4	–0.0115065467835717240
a_5	0.0135928794332684120	c_5	0.000289358324681787389
b_5	0.0132073542451078006	d_5	–0.000179480784699367342

и показан ниже:

$$
\begin{aligned}
f(\eta) = {} & 0.169590122015878\eta^2 - 0.00975243043702233\eta^3 + \\
& + 0.00949920484878554\eta^4 - 0.00490827418566491\eta^5 + \\
& + 0.00107974724248178\eta^6 - 0.000128524622004544\eta^7 + \\
& + 0.873236904505410 \times 10^{-5}\eta^8 - 3.20151483330390 \times 10^{-7}\eta^9 + \\
& + 4.93213211515512 \times 10^{-9}\eta^{10}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Видно, что аппроксимация по формуле (7) дает неправильное поведение функции $f(\eta)$ в области $\eta \gtrapprox 14$. Формула (6), найденная с помощью алгоритма Левенберга – Марквардта для НМНК, хорошо оценивает значения функции $f(\eta)$ на очень большом интервале $0 \le \eta \le 40$. Аппроксимации по формуле (6) сопоставимы и близки к результатам, полученным численным интегрированием. Видно, что наклон $f(\eta)$ является постоянным при больших значениях η. Если наклон функции постоянен при больших значениях η, то значения высших производных должны стремиться к нулю, как в случае $f''(\eta)$ (см. рис. 7).

Для более понятного восприятия полученных данных на рис. 5 приведены графики, построенные по формулам (6) и (7) в окрестности $0 \le \eta \le 2$. Видно, что все кривые практически совпадают и проходят через точки, соответствующие численным расчетам *1*.

Безразмерный профиль продольной скорости $\bar{u} = f'$ показан на рис. 6 для $0 \le \eta \le 15$. Здесь *1* – результаты расчета решения краевой задачи Блазиуса (4) и (5), приведена каждая пятнадцатая точка на графике; *2* – первая производная функции (6); *3* – аппроксимация по следующей формуле из работы [29]:

$$
\begin{aligned}
f'(\eta) = {} & 0.337538516034295\eta - 0.0224722593243771\eta^2 + \\
& + 0.0309005339811106\eta^3 - 0.0211885940031025\eta^4 + \\
& + 0.00562296515736044\eta^5 - 0.000773827415658246\eta^6 + \\
& + 0.0000591838415872827\eta^7 - 0.239635130719565 \times 10^{-5}\eta^8 + \\
& + 4.01841870085965 \times 10^{-8}\eta^9.
\end{aligned} \tag{8}
$$

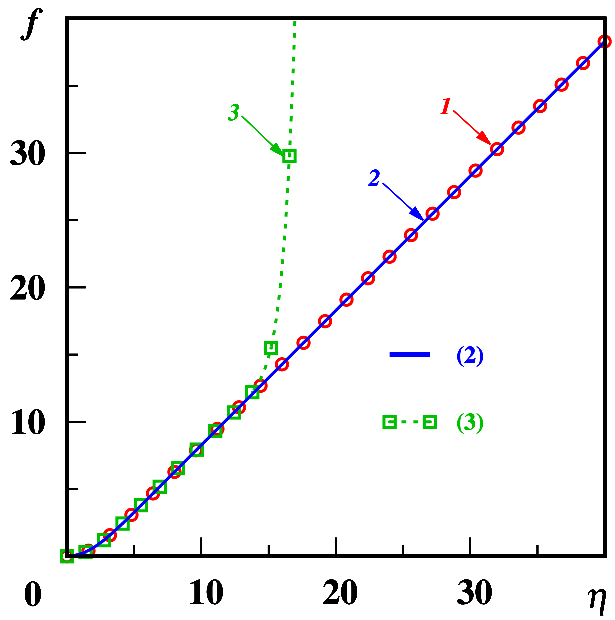

Рис. 4. График функции Блазиуса $f(\eta)$ для $0 \le \eta \le 40$: *1* – расчет краевой задачи Блазиуса (4)–(5); *2* – аппроксимация по формуле (6); *3* – расчет по формуле (7)
Fig. 4. Graph of the Blasius function $f(\eta)$ for $0 \le \eta \le 40$: *1* – calculation of the Blasius boundary value problem (4)–(5); *2* – approximation by the formula (7)

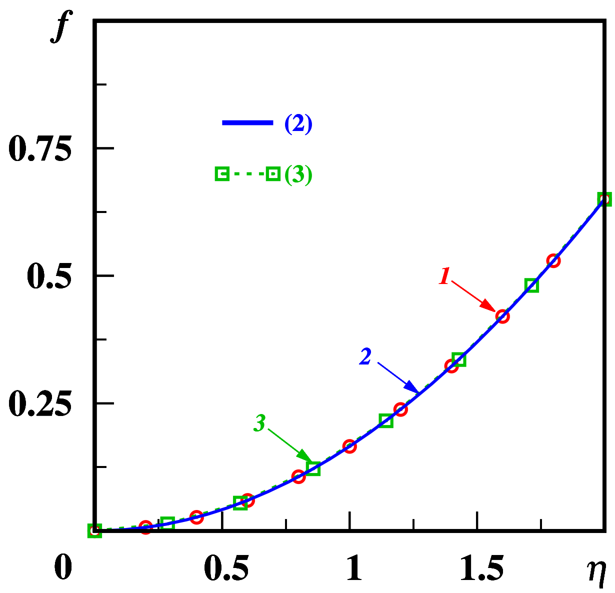

Рис. 5. График функции Блазиуса $f(\eta)$ вблизи стенки $0 \le \eta \le 2$: *1* – расчет краевой задачи Блазиуса (4) и (5); *2* – аппроксимация по формуле (6); *3* – расчет по формуле (7)
Fig. 5. Graph of the Blasius function $f(\eta)$ near the wall $0 \le \eta \le 2$: *1* – calculation of the Blasius boundary value problem (4) and (5); *2* – approximation by the formula (7)

На рис. 6 хорошо видно, что f' увеличивается по мере увеличения расстояния от плоской пластины до тех пор, пока не достигнет значения 1.0 на конце пластины.

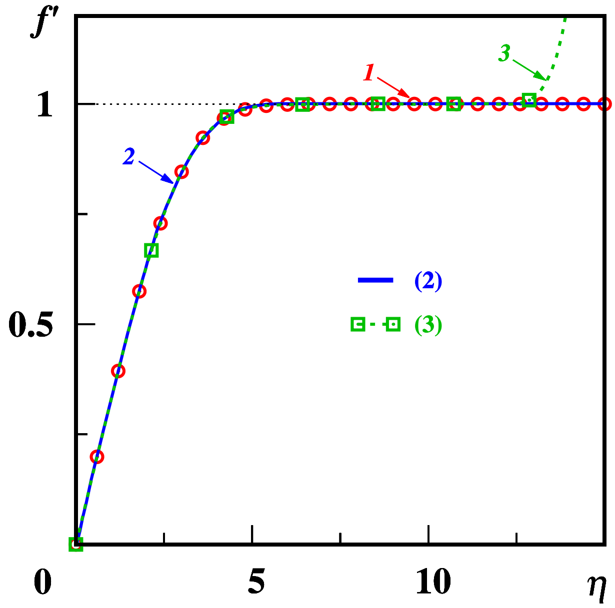

Рис. 6. Безразмерный профиль продольной скорости $\bar{u}$ или первой производной функции $f'(\eta)$ для $0 \leq \eta \leq 15$: *1* – расчет краевой задачи Блазиуса (4)–(5); *2* – производная, рассчитанная при аппроксимации по формуле (6); *3* – расчет по формуле (8)

Fig. 6. Dimensionless profile of the longitudinal velocity $\bar{u}$ or the first derivative of the function $f'(\eta)$ for $0 \leq \eta \leq 15$: *1* – calculation of the Blasius boundary value problem (4)–(5); *2* – the derivative calculated from the approximation by the formula (6); *3* – approximation by the formula (8)

Аналогичное сопоставление расчетных значений второй производной функции $f''(\eta)$ сделано для $0 \leq \eta \leq 15$ с использованием формулы [29] (см. рис. 7)

$$\begin{aligned} f''(\eta) = {} & 0.332057336270228 - 0.0264531212585649\eta + \\ & + 0.0663932833156139\eta^2 - 0.0689310639889838\eta^3 + \\ & + 0.0232453293176898\eta^4 - 0.00381202903000096\eta^5 + \\ & + 0.000334793989126382\eta^6 - 0.0000151821911347140\eta^7 + \\ & + 2.79989280616388 \times 10^{-7}\eta^8. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь использованы те же обозначения, что на рис. 6. Видно, что аппроксимация (9) снова не работает в области $\eta \gtrapprox 14$. Автор статьи [29] численно провел расчет решения краевой задачи Блазиуса (4) и (5) стандартным методом пристрелки и получил решение для функции $f(\eta)$ и ее производных с тринадцатью знаками дробной части для $0 \leq \eta \leq 12.43$, использовав простой (приведенный в статье), код системы компьютерной алгебры Maple. Однако метод пристрелки расходится за пределами указанного интервала. На основе численных расчетов, сделанных в [29], этим же автором предложены приближенные аналитические решения с использованием подгонки кривых: три разные независимые аналитические функции для $f(\eta)$, $f'(\eta)$ и $f''(\eta)$, которые, как видно, не соответствуют численным данным в области больших η. Границы применимости этих формул в статье не указаны. Отметим, что автор модифицировал также метод пристрелки, заменив второе граничное условие для функции f: $f'(\infty) = 1$ на $f''(0) = 0.332057336270228$, и получил более точное численное решение задачи, имеющее больший радиус сходимости $|\eta| \le 251.67409$. Результаты этого расчета второй производной от функции $f(\eta)$ по формуле (6) хорошо совпадают со значениями $f''(\eta)$ при численном моделировании.

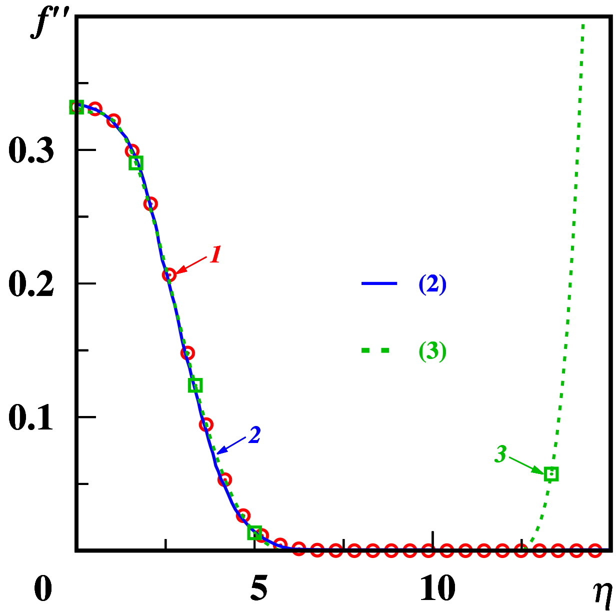

Рис. 7. График второй производной функции Блазиуса $f''(\eta)$ для $0 \le \eta \le 15$: *1* – расчет решения краевой задачи Блазиуса (4) и (5); *2* – производная при аппроксимации по формуле (6); *3* – аппроксимация по формуле (9)

Fig. 7. Graph of the second derivative of the Blasius function $f''(\eta)$ for $0 \le \eta \le 15$: *1* – calculation of the Blasius boundary value problem (4) and (5); *2* – the derivative calculated from the approximation by the formula (6); *3* – approximation by the formula (9)

Производная $f'(\eta)$, выражающая продольную скорость u, применяется при расчетах в качестве начального профиля скорости в плоских и трехмерных задачах гидромеханики [40–42]. Полученные результаты используются для численного моделирования, позволяющего непрерывно рассчитывать область потока в пограничном слое с ламинарным, переходным и турбулентным режимами при высокой интенсивности турбулентности свободного потока.

Заключение

Решение краевой задачи Блазиуса получено численным интегрированием посредством пристрелки с использованием метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности на большом интервале автомодельной переменной $0 \le \eta \le 40$ для подробной мелкой сетки. Полученные точные значения f, f' и f'' использованы далее при получении конечного выражения для функции $f(\eta)$ из решения краевой задачи Блазиуса.

B-сплайном третьего порядка проведена аппроксимация функции Блазиуса $f(\eta)$ и ее производных f' и f'' с использованием большого числа точек. Установлено хорошее совпадение с расчетами.

При исследовании пограничного слоя несжимаемой жидкости на плоской пластине с нулевым градиентом давления найдена новая аппроксимация функции Блазиуса $f(\eta)$ нелинейным методом наименьших квадратов, дающая полное совпадение с результатами численных расчетов. Проведено аналогичное сравнение результатов вычисления аппроксимаций производных f' и f''. Также наблюдается практическое совпадение с расчетными точками. Аналитическая формула, полученная в настоящей работе, применима для всех $\eta \geq 0$. Производные f' и f'' стремятся к своим асимптотическим значениям при $\eta \to \infty$.

Наиболее важными из полученных результатов представляются следующие: одна-единственная найденная функция f дает эффективное приближение к решению классической задачи Блазиуса; первая и вторая производные этой функции практически совпадают с точными значениями, численными расчетами и аппроксимациями B-сплайнами. Продольный профиль скорости в пограничном слое над плоской пластиной, рассчитанный на основе первой производной функции Блазиуса f', может быть использован в качестве начального при численном моделировании переходных и турбулентных течений несжимаемой жидкости.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Tollmien W., Schlichting H., Görtler H., Riegels F.W.* Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Riegels F.W. (Hrsg.) Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen. Berlin, Heidelberg: Springer, 1961, S. 575–584. https://doi.org/10.1007/978-3-662-11836-8_43.

2. *Prandtl L., Wieghardt K.* Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz // Nachr. Akad. Wiss. Goettingen, Math.-Phys. Kl., Math.-Phys.-Chem. Abt. 1945. S. 6–19.

3. *White F.M.* Viscous Fluid Flow. 1st ed. McGraw-Hill, 1974. P. 233–237.

4. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. 6-е изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. С. 6–34, 59–73.

5. *White F.M.* Viscous Fluid Flow. 2nd ed. McGraw-Hill, 1991. P. 233–253, 504–520.

6. *Panton R.L.* (Ed.) Incompressible Fluid Flow. New York, NY: Wiley, 1996. P. 581–591.

7. *Rosenhead L.* (Ed.) Laminar Boundary Layers: An Account of the Development, Structure, and Stability of Laminar Boundary Layers in Incompressible Fluids, together with a Description of the Associated Experimental Techniques. Oxford: Clarendon Press, 1963. P. 198–292, 419–420.

8. *Burr K.P., Akylas T.R., Mei C.C.* Chapter two. Two-dimensional laminar boundary layers. I-Campus Project. School-wide Program on Fluid Mechanics Modules on High Reynolds Number Flows. 2016. P. 1–33. https://web.mit.edu/fluids-modules/www/highspeed_flows/ver2/bl_Chap2.pdf.

9. *Katopodes N.D.* Chapter 9. Boundary-layer flow // Free-Surface Flow: Environmental Fluid Mechanics. Butterworth-Heinemann, 2019. P. 652–708. https://doi.org/10.1016/b978-0-12-815489-2.00009-5.

10. *Blasius H.* Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // Z. Math. Phys. 1908. Bd. 56. S. 1–37. URL: https://dokumen.tips/documents/blasius-h-1908-grenzschichten-in-fluessigkeiten-mit-kleiner-reibung.html.

11. *Олейник О.А.* О системе уравнений теории пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3, № 3. С. 489–507. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7851.

12. *Nickel K.* Einige Eigenschaften von Lösungen der Prandtlschen Grenzschicht-Differential-gleichunge // Arch. Ration. Mech. Anal. 1958. Bd. 2, H. 1. S. 1–31. https://doi.org/10.1007/bf00277916.

13. *Nickel K.* Ein Eindeutigkeitssatz für instationäre Grenzschichten // Math. Z. 1960. Bd. 74, H. 1. S. 209–220. https://doi.org/10.1007/BF01180484.

14. *Töpfer K.* Bemerkung zu dem Aufsatz von H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // Z. Math. Phys. 1912. Bd. 60. S. 397–398.

15. *Howarth L.* On the solution of the laminar boundary layer equations // Proc. R. Soc. London, Ser. A. 1938. V. 164, No 919. P. 547–579. https://doi.org/10.1098/rspa.1938.0037.

16. *Liu Y., Kurra S.N.* Solution of Blasius equation by variational iteration // Appl. Math. 2011. V. 1, No 1. P. 24–27. https://doi.org/10.5923/j.am.20110101.03.

17. *He J.H.* A simple perturbation approach to Blasius equation // Appl. Math. Comput. 2003. V. 140, Nos 2–3. P. 217–222. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00189-3.

18. *Yun B.I.* An iteration method generating analytical solutions for Blasius problem // J. Appl. Math. 2011. V. 2011, No 1. Art. 925649. https://doi.org/10.1155/2011/925649.

19. *Wazwaz A.-M.* The variational iteration method for solving two forms of Blasius equation on a half-infinite domain // Appl. Math. Comput. 2007. V. 188, No 1. P. 485–491. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.10.009.

20. *Adomian G.* A review of the decomposition method in applied mathematics // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 135, No 2. P. 501–544. https://doi.org/10.1016/0022-247X(88)90170-9.

21. *Liao S.J.* A uniformly valid analytic solution of two-dimensional viscous flow over a semi-infinite flat plate // J. Fluid Mech. 1999. V. 385. P. 101–128. https://doi.org/10.1017/s0022112099004292.

22. *Parand K., Dehghan M., Taghavi A.* Modified generalized Laguerre function Tau method for solving laminar viscous flow: The Blasius equation // Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow. 2010. V. 20, No 7. P. 728–743. https://doi.org/10.1108/09615531011065539.

23. *Aminikhah H., Kazemi S.* Numerical solution of the Blasius viscous flow problem by quartic B-spline method // Int. J. Eng. Math. V. 2016, No 1. Art. 9014354. https://doi.org/10.1155/2016/9014354.

24. *Motsa S.S.* A new spectral local linearization method for nonlinear boundary layer flow problems // J. Appl. Math. 2013. V. 2013, No 1. Art. 423628. https://doi.org/10.1155/2013/423628.

25. *Liao S.-J.* An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems // Int. J. Non-Linear Mech. 1999. V. 34, No 4. P. 759–778. https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00056-0.

26. *Falkner V.M., Skan S.W.* LXXXV. Solutions of the boundary-layer equations // London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci., Ser. 7. 1931. V. 12, No 80. P. 865–896. https://doi.org/10.1080/14786443109461870.

27. *Asaithambi A.* A second-order finite-difference method for the Falkner–Skan equation // Appl. Math. Comput. 2004. V. 156, No 3. P. 779–786. https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.06.020.

28. *Meade D.B., Haran B.S., White R.E.* The shooting technique for the solution of two-point boundary value problems // MapleTech. 1996. V. 3, No 1. P. 1–8.

29. *Sun B.-H.* Solving Prandtl-Blasius boundary layer equation using Maple. Preprints. 2020. 2020080296. 12 p. https://doi.org/10.20944/preprints202008.0296.v2.

30. *Givi P.* Blasius similarity solution for boundary layer flow over a flat plate. MEMS1055, Computer Aided Analysis in Transport Phenomena. 11 p.

31. *Bani-Hani E.H., Assad M.E.H.* Boundary-layer theory of fluid flow past a flat-plate: Numerical solution using MATLAB // Int. J. Comput. Appl. 2018. V. 180, No 18. P. 6–8. https://doi.org/10.5120/ijca2018916374.

32. *Сабер С.Р.С.* Спектр пульсаций развитого турбулентного пограничного слоя на пластине в несжимаемой жидкости: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Жуковский: МФТИ, 2022. 117 с.

33. *Khandelwal R., Kumawat P., Khandelwal Y.* Solution of the Blasius equation by using Adomian Kamal transform // Int. J. Appl. Comput. Math. 2019. V. 5, No 1. Art. 20. https://doi.org/10.1007/s40819-019-0601-7.

34. *Majid Z.A., See P.P.* Study of predictor corrector block method via multiple shooting to Blasius and Sakiadis flow // Appl. Math. Comput. 2017. V. 314. P. 469–483. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.06.038.

35. *Mutuk H.* A neural network study of Blasius equation // Neural Process. Lett. 2020. V. 51, No 3. P. 2179–2194. https://doi.org/10.1007/s11063-019-10184-9.

36. *Parlange J.Y., Braddock R.D., Sander D.* Analytical approximations to the solution of the Blasius equation // Acta Mech. 1981. V. 38, No 1. P. 119–125. https://doi.org/10.1007/BF01351467.

37. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary-Layer Theory. Berlin, Heidelberg: Springer, 2017. P. 156–164. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52919-5.

38. *Schlichting H.* Boundary-Layer Theory. New York, NY: McGraw-Hill, 1979. P. 95–101, 127–149, 163–170.

39. *de Boor C.* A Practical Guide to Splines. Marsden J.E., Sirovich L. (Eds.). Ser.: Applied Mathematical Sciences. V. 27. New York, NY: Springer, 2001. xvii, 346 p.

40. *Зубарев В.М.* Влияния параметров сильно турбулизированного потока жидкости на пристенные переходные течения в пограничном слое // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2020. Т. 162, кн. 1. С. 38–51. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.1.38-51.

41. *Зубарев В.М.* Исследование совместного влияния параметров турбулентности набегающего потока на переход течения в пограничном слое // Тепл. проц. в техн. 2016. Т. 8, № 1. С. 4–15.

42. *Zubarev V. M.* Modeling of a three-dimensional incompressible fluid flow in a turbulent boundary layer in a diffuser // Fluid Dyn. 2023. V. 58, No 8. P. 1684–1696. https://doi.org/0.1134/S0015462823602644.

References

1. Tollmien W., Schlichting H., Görtler H., Riegels F.W. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. In: Riegels F.W. (Hrsg.) *Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen.* Berlin, Heidelberg, Springer, 1961, S. 575–584. https://doi.org/10.1007/978-3-662-11836-8_43. (In German)

2. Prandtl L., Wieghardt K. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz. *Nachr. Akad. Wiss. Goettingen, Math.-Phys. Kl., Math.-Phys.-Chem. Abt.*, 1945, S. 6–19. (In German)

3. White F.M. *Viscous Fluid Flow.* 1 st ed. McGraw-Hill, 1974, pp. 233–237.

4. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of Liquids and Gases]. Moscow, Nauka, Gl. Red. Fiz.-Mat. Lit., 1987, pp. 6–34, 59–73. (In Russian)

5. White F.M. *Viscous Fluid Flow.* 2nd ed. McGraw-Hill, 1991, pp. 233–253, 504–520.

6. Panton R.L. *Incompressible Fluid Flow.* New York, NY, Wiley, 1996, pp. 581–591.

7. Rosenhead L. (Ed.) *Laminar Boundary Layers: An Account of the Development, Structure, and Stability of Laminar Boundary Layers in Incompressible Fluids, together with a Description of the Associated Experimental Techniques.* Oxford, Clarendon Press, 1963, pp. 198–292, 419–420.

8. Burr K.P., Akylas T.R., Mei C.C. Chapter two. Two-dimensional laminar boundary layers. I-Campus Project. School-wide Program on Fluid Mechanics Modules on High Reynolds Number Flows. 2016, pp. 1–33.
URL: https://web.mit.edu/fluids-modules/www/highspeed_flows/ver2/bl_Chap2.pdf.

9. Katopodes N.D. Chapter 9. Boundary-layer flow. In: *Free-Surface Flow: Environmental Fluid Mechanics.* Butterworth-Heinemann, 2019. pp. 652–708.
https://doi.org/10.1016/b978-0-12-815489-2.00009-5.

10. Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. *Z. Math. Phys.*, 1908, Bd. 56, H. 1, S. 1–37. URL: https://dokumen.tips/documents/blasius-h-1908-grenzschichten-in-fluessigkeiten-mit-kleiner-reibung.html. (In German)

11. Oleinik O.A. On a system of equations in boundary layer theory. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1963, vol. 3, no. 3, pp. 650–673. https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90293-3.

12. Nickel K. Einige Eigenschaften von Lösungen der Prandtlschen Grenzschicht-Differentialgleichungen. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1958, Bd. 2, H. 1, S. 1–31.
https://doi.org/10.1007/bf00277916. (In German)

13. Nickel K. Ein Eindeutigkeitssatz für instationäre Grenzschichten. *Math. Z.*, 1960, Bd. 74, H. 1, S. 209–220. https://doi.org/10.1007/BF01180484. (In German)

14. Töpfer K. Bemerkung zu dem Aufsatz von H. Blasius : Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // Z. Math. Phys., 1912, Bd. 60, S. 397–398. (In German)

15. Howarth L. On the solution of the laminar boundary layer equations. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1938, vol. 164, no. 919, pp. 547–579. https://doi.org/10.1098/rspa.1938.0037.

16. Liu Y., Kurra S.N. Solution of Blasius equation by variational iteration. *Appl. Math.*, 2011, vol. 1, no. 1, pp. 24–27. https://doi.org/10.5923/j.am.20110101.03.

17. He J.H. A simple perturbation approach to Blasius equation. *Appl. Math. Comput.*, 2003, vol. 140, nos. 2–3, pp. 217–222. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00189-3.

18. Yun B.I. An iteration method generating analytical solutions for Blasius problem. *J. Appl. Math.*, 2011, vol. 2011, no. 1, art. 925649. https://doi.org/10.1155/2011/925649.

19. Wazwaz A.-M. The variational iteration method for solving two forms of Blasius equation on a half-infinite domain. *Appl. Math. Comput.*, 2007, vol. 188, no. 1, pp. 485–491. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.10.009.

20. Adomian G. A review of the decomposition method in applied mathematics. *J. Math. Anal. Appl.*, 1988, vol. 135, no. 2, pp. 501–544. https://doi.org/10.1016/0022-247X(88)90170-9.

21. Liao S.J. A uniformly valid analytic solution of two-dimensional viscous flow over a semi-infinite flat plate. *J. Fluid Mech.*, 1999, vol. 385, pp. 101–128. https://doi.org/10.1017/s0022112099004292.

22. Parand K., Dehghan M., Taghavi A. Modified generalized Laguerre function Tau method for solving laminar viscous flow: The Blasius equation. *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, 2010, vol. 20, no. 7, pp. 728–743. https://doi.org/10.1108/09615531011065539.

23. Aminikhah H., Kazemi S. Numerical solution of the Blasius viscous flow problem by quartic B-spline method. *Int. J. Eng. Math.*, 2016, vol. 2016, no. 1, art. 9014354. https://doi.org/10.1155/2016/9014354.

24. Motsa S.S. A new spectral local linearization method for nonlinear boundary layer flow problems. *J. Appl. Math.*, 2013, vol. 2013, no. 1, art. 423628. https://doi.org/10.1155/2013/423628.

25. Liao S.-J. An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1999, vol. 34, no. 4, pp. 759–778. https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00056-0.

26. Falkner V.M., Skan S.W. LXXXV. Solutions of the boundary-layer equations. *London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci., Ser. 7*, 1931, vol. 12, no. 80, pp. 865–896. https://doi.org/10.1080/14786443109461870.

27. Asaithambi A. A second-order finite-difference method for the Falkner–Skan equation. *Appl. Math. Comput.*, 2004, vol. 156, no. 3, pp. 779–786. https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.06.020.

28. Meade D.B., Haran B.S., White R.E. The shooting technique for the solution of two-point boundary value problems. *MapleTech*, 1996, vol. 3, no. 1, pp. 1–8.

29. Sun B.-H. Solving Prandtl-Blasius boundary layer equation using Maple. Preprints, 2020, 2020080296. 12 p. https://doi.org/10.20944/preprints202008.0296.v2.

30. Givi P. Blasius similarity solution for boundary layer flow over a flat plate. MEMS1055, Computer Aided Analysis in Transport Phenomena. 11 p.

31. Bani-Hani E.H., Assad M.E.H. Boundary-layer theory of fluid flow past a flat-plate: Numerical solution using MATLAB. *Int. J. Comput. Appl.*, 2018, vol. 180, no. 18, pp. 6–8. https://doi.org/10.5120/ijca2018916374.

32. Saber S.R.S. Pulsation spectrum of the developed turbulent boundary layer on a plate in an incompressible liquid. *Extended Abstract of Cand. Sci.* (*Physics and Mathematics*) *Diss.* Zhukovsky, MFTI, 2022. 117 p. (In Russian)

33. Khandelwal R., Kumawat P., Khandelwal Y. Solution of the Blasius equation by using Adomian Kamal transform. *Int. J. Appl. Comput. Math.*, 2019, vol. 5, no. 1, art. 20. https://doi.org/10.1007/s40819-019-0601-7.

34. Majid Z.A., See P.P. Study of predictor corrector block method via multiple shooting to Blasius and Sakiadis flow. *Appl. Math. Comput.*, 2017, vol. 314, pp. 469–483. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.06.038.

35. Mutuk H. A neural network study of Blasius equation. *Neural Process. Lett.*, 2020, vol. 51, no. 3, pp. 2179–2194. https://doi.org/10.1007/s11063-019-10184-9.

36. Parlange J.Y., Braddock R.D., Sander D. Analytical approximations to the solution of the Blasius equation. *Acta Mech.*, 1981, vol. 38, no. 1, pp. 119–125. https://doi.org/10.1007/BF01351467.

37. Schlichting H., Gersten K. *Boundary-Layer Theory.* Berlin, Heidelberg, Springer, 2017. pp. 156–164. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52919-5.

38. Schlichting H. *Boundary-Layer Theory.* New York, NY, McGraw-Hill, 1979, pp. 95–101, 127–149, 163–170.

39. de Boor C. *A Practical Guide to Splines*. Marsden J.E., Sirovich L. (Eds.). Ser.: Applied Mathematical Sciences. Vol. 27. New York, NY, Springer, 2001. xvii, 346 p.

40. Zubarev V.M. The influence of strongly turbulized liquid flow parameters on the near-wall transitional flows in the boundary layer. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 1, pp. 38–51. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.1.38-51. (In Russian)

41. Zubarev V.M. Investigation of combined effect of turbulence parameters of the main stream on a flow transition in a boundary layer. *Therm. Processes Eng.*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 4–15. (In Russian)

42. Zubarev V.M. Modeling of a three-dimensional incompressible fluid flow in a turbulent boundary layer in a diffuser. *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58, no. 8, pp. 1684–1696. https://doi.org/10.1134/S0015462823602644.

Информация об авторах

Вячеслав Михайлович Зубарев, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук

E-mail: *zubarev@ipmnet.ru*

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1155-5509

Author Information

Vyacheslav M. Zubarev, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences

E-mail: *zubarev@ipmnet.ru*

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1155-5509

Поступила в редакцию 5.11.2024
Принята к публикации 18.04.2025

Received November 5, 2024
Accepted April 18, 2025