

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.196-208>**Модель циклической оболочки с локальным углублением на внутренней поверхности****С.Н. Якупов¹, Х.Г. Киямов¹, И.З. Мухамедова^{1,2,3} ✉, Б.Ф. Тазюков³**

¹Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук», г. Казань, Россия

²Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия

³Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

✉ muhammedova-inzilija@mail.ru

Аннотация

Построена математическая модель расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) циклической оболочки с дефектом в виде локального несквозного углубления на внутренней поверхности на основе трехмерного сплайнового варианта метода конечных элементов (МКЭ). Предложен подход, сочетающий в себе параметризацию рассматриваемой области и кубическую аппроксимацию искомых переменных. Приведены результаты исследования распределения напряжений в дефектной области при различном расположении зоны углубления. Установлены закономерности изменения НДС циклической оболочки при варьировании геометрических параметров углубления.

Ключевые слова: циклическая оболочка, метод, параметризация, трехмерная конечно-элементная модель, локальное углубление, интенсивность напряжений, вычислительный эксперимент

Благодарности. Якупов С.Н. выполнил работу по влиянию вибрации за счет гранта Академии наук Республики Татарстан, предоставленного молодым кандидатам наук (постдокторантам) с целью защиты докторской диссертации, выполнения научно-исследовательских работ, а также выполнения трудовых функций в научных и образовательных организациях Республики Татарстан в рамках Государственной программы Республики Татарстан «Научно-технологическое развитие Республики Татарстан».

Для цитирования: Якупов С.Н., Киямов Х.Г., Мухамедова И.З., Тазюков Б.Ф. Модель циклической оболочки с локальным углублением на внутренней поверхности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 196–208.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.196-208>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.196-208>

Modeling of a cyclic shell with a local deepening on the inner surface

S.N. Yakupov¹, H.G. Kiyamov¹, I.Z. Mukhamedova^{1,2,3} ✉, B.F. Tazyukov³

¹*FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia*

²*Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia*

³*Kazan Federal University, Kazan, Russia*

✉ muhamedova-inzilija@mail.ru

Abstract

A mathematical model for calculating the stress-strain state (SSS) of a cyclic shell with a defect in the form of a local non-through depression on the inner surface was constructed using a three-dimensional spline version of the finite element method (FEM). An approach was proposed that combines the parameterization of the region under consideration and the cubic approximation of the target variables. The findings on the stress distribution in the defective region were presented for different locations of the depression zone. The patterns of change in the SSS of a cyclic shell with variations in the geometric parameters of the depression were established.

Keywords: cyclic shell, method, parameterization, three-dimensional finite element model, local deepening, stress intensity, numerical experiment

Acknowledgments. S.N. Yakupov's work on the influence of vibration was supported by a grant from the Tatarstan Academy of Sciences for young Candidate of Sciences degree holders (postdoctoral students) aimed to support them in writing doctoral dissertations, performing research work, and fulfilling professional responsibilities within scientific and educational organizations of the Republic of Tatarstan as part of the State Program of the Republic of Tatarstan "Scientific and technological development of the Republic of Tatarstan."

For citation: Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Mukhamedova I.Z., Tazyukov B.F. Modeling of a cyclic shell with a local deepening on the inner surface. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 196–208.

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.196-208>. (In Russian)

Введение

В настоящее время при создании архитектурных форм городской и загородной застройки, спортивных и развлекательных сооружений применяют многообразные виды циклических оболочек [1]. В технике такие оболочки в виде трубчатых винтовых и спиральных

поверхностей используют в нагревательных элементах электроплит, аппаратах по перегонке жидкостей, в современных энергосберегающих электролампах. В промышленном строительстве циклические оболочки используют в трубопроводах и их соединительных элементах, сосудах высокого давления [2, 3]. При создании названных конструкций проводят поиск рациональной геометрии их элементов, прежде всего исходя из их функционального назначения, а также технологических и экономических возможностей [4–6].

В процессе эксплуатации оболочечных конструкций возникают внутренние дефекты типа разрывов, расслоений, растрескиваний, наружные дефекты проката (пережог, пористость, усадочные раковины), коррозия, а также механические повреждения поверхности. Количество, размер, глубина проникновения и место расположения дефекта ведут к концентрации напряжений в области дефекта, что определяет техническое состояние и долговечность конструкции в целом. В связи с этим представляет интерес исследование распределения НДС в оболочках при изменении геометрических параметров, в частности, в области локальных углублений. Экспериментальное и теоретическое исследование оболочечных конструкций с дефектами различного рода, а также построение математических моделей для оценки их НДС рассмотрены, например, в работах [7–13].

Для расчета НДС оболочек сложной геометрии используют различные численные методы, например, метод конечных разностей, метод коллокации, МКЭ, метод граничных элементов, а также применяют вариационные методы. Методы расчета НДС оболочек сложной геометрии, а также разработка подходов параметризации области приведены, в частности, в работах авторов [14–21].

В [22–24] изложен метод расчета тонкостенных оболочечных конструкций сложной формы и со сложным контуром – сплайновый вариант МКЭ в двумерной постановке. Метод обеспечивает геометрическую неразрывность между конечными элементами (КЭ), а также непрерывность искомых величин и их первых производных по линии соприкосновения элементов. Однако предложенный подход на основе двумерных КЭ не позволяет с достаточной степенью точности определять НДС элементов конструкций в области локальных углублений и дефектов. Поэтому возникает необходимость использования трехмерных моделей.

В [25–28] предложен сплайновый вариант МКЭ для оболочек сложной геометрии в трехмерной постановке. Синтезированный вариант включает в одно целое двумерные и трехмерные КЭ [28–30]. Вопросы сходимости этого метода и достоверности результатов расчета рассмотрены в [31, 32].

1. Основные соотношения трехмерного сплайнового варианта МКЭ

Трехмерный сплайновый вариант МКЭ сочетает параметризацию рассматриваемой трехмерной области и кубическую аппроксимацию искомых переменных. Срединная поверхность циклической оболочки может быть описана поверхностями [14], которые образуются движением окружности переменного радиуса вдоль направляющей кривой эллиптической формы (рис. 1):

$$r(\alpha, \varphi) = \rho(\alpha) + R(\alpha)[e_0(\alpha) \cos \varphi + g_0(\alpha) \sin \varphi],$$

$$\rho(\alpha) = \frac{R_1 R_2}{\sqrt{R_2^2 \sin^2 \alpha + R_1^2 \cos^2 \alpha}}, \quad R(\alpha) = R_b + \frac{2\alpha}{\pi}(R_a - R_b),$$

где $r(\alpha, \varphi)$ – радиус-вектор циклической поверхности; $\rho(\alpha)$ – радиус-вектор линии центров образующих поверхностей; φ – угол наклона окружности; $e_0(\alpha)$, $g_0(\alpha)$ – орты прямоугольной системы координат в плоскости линии центров образующих окружностей.

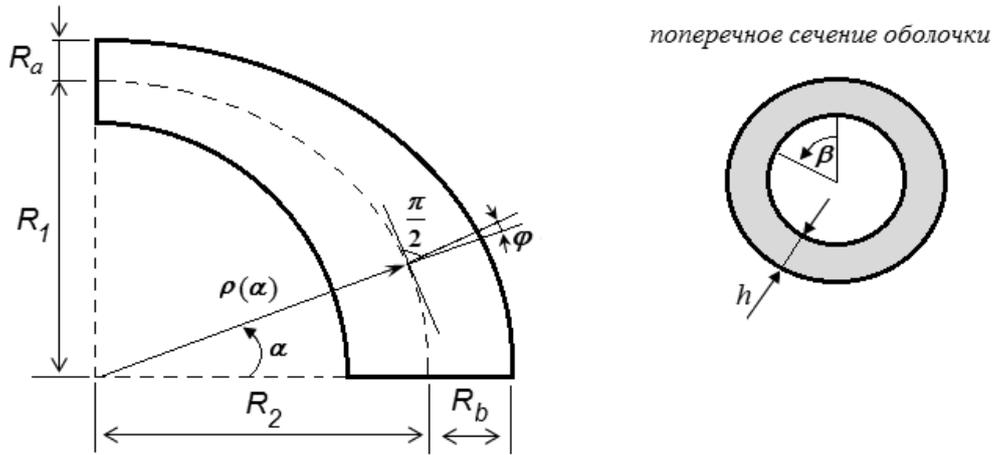


Рис. 1. Геометрическая модель циклической оболочки

Fig. 1. Geometric model of a cylindrical shell

Циклическая оболочка объемом V может быть представлена через параметры прямоугольного параллелепипеда объема V_0 таким образом, чтобы прямоугольной сетке в области параллелепипеда соответствовала криволинейная пространственная сетка оболочки:

$$\begin{aligned} x &= [\rho(\pi t^3/2) + (R(\pi t^3/2) + t^1) \cos(\pi t^2) \cos \varphi] \cos(\pi t^3/2), \\ y &= [\rho(\pi t^3/2) + (R(\pi t^3/2) + t^1) \cos(\pi t^2) \cos \varphi] \sin(\pi t^3/2), \\ z &= [R(\pi t^3/2) + t^1] \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Срединная поверхность оболочки может быть выражена через параметры t^1, t^2, t^3 по формулам $\alpha = \pi t^3/2$, $\beta = \pi t^2$, $z = h t^1$; h – толщина оболочки; $t^1 \in [0; 1]$, $t^2 \in [-1; 1]$, $t^3 \in [0; 1]$.

Согласно соотношениям (1) определим координатные векторы

$$\bar{r}_1 = \partial \bar{r} / \partial t^1, \quad \bar{r}_2 = \partial \bar{r} / \partial t^2, \quad \bar{r}_3 = \partial \bar{r} / \partial t^3. \quad (2)$$

Далее, исходя из (2), найдем ковариантные компоненты метрического тензора g_{ij} :

$$g_{11} = \bar{r}_1 \bar{r}_1, \quad g_{12} = \bar{r}_1 \bar{r}_2, \quad g_{22} = \bar{r}_2 \bar{r}_2, \quad g_{13} = \bar{r}_1 \bar{r}_3, \quad g_{23} = \bar{r}_2 \bar{r}_3, \quad g_{33} = \bar{r}_3 \bar{r}_3 \quad (3)$$

и дискриминант метрического тензора

$$g = g_{33} (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) - g_{32} (g_{11} g_{23} - g_{21} g_{13}) + g_{31} (g_{12} g_{23} - g_{13} g_{22}). \quad (4)$$

Из (3) и (4) определим символы Кристоффеля

$$G_{jk}^i = \frac{g^{it}}{2} \left(\frac{\partial g_{jt}}{\partial t^k} + \frac{\partial g_{kt}}{\partial t^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial t^t} \right).$$

Пусть на внутренней поверхности рассматриваемой оболочки имеется локальное (коррозионное) углубление (рис. 2), которое зададим в виде элемента эллиптической формы в плане с полуосями a и b :

$$\begin{aligned} x &= \{\rho(\pi t^3/2) + [R(\pi t^3/2) + (t^1 - h_{cor}(t^2, t^3)(t^1 - t_p^1))]\cos(\pi t^2)\cos\varphi\}\cos(\pi t^3/2), \\ y &= \{\rho(\pi t^3/2) + [R(\pi t^3/2) + (t^1 - h_{cor}(t^2, t^3)(t^1 - t_p^1))]\cos(\pi t^2)\sin\varphi\}\sin(\pi t^3/2), \\ z &= [R(\pi t^3/2) + (t^1 - h_{cor}(t^2, t^3)(t^1 - t_p^1))]\sin\varphi, \quad h_{cor}(t^2, t^3) = h_p e^\chi, \\ \chi &= \gamma((t^3 - t_p^3)^2/a^2 + (t^2 - t_p^2)^2/b^2), \quad t^1 \in [0; 1], \quad t^2 \in [-1; 1], \quad t^3 \in [0; 1], \end{aligned}$$

где γ – степень сжатия-растяжения эллипса по координатам t^2 и t^3 ; h_p – минимальная толщина оболочки в дефектной области; $t^1 = t_p^1$, $t^2 = t_p^2$, $t^3 = t_p^3$ – координаты центра дефектной области.

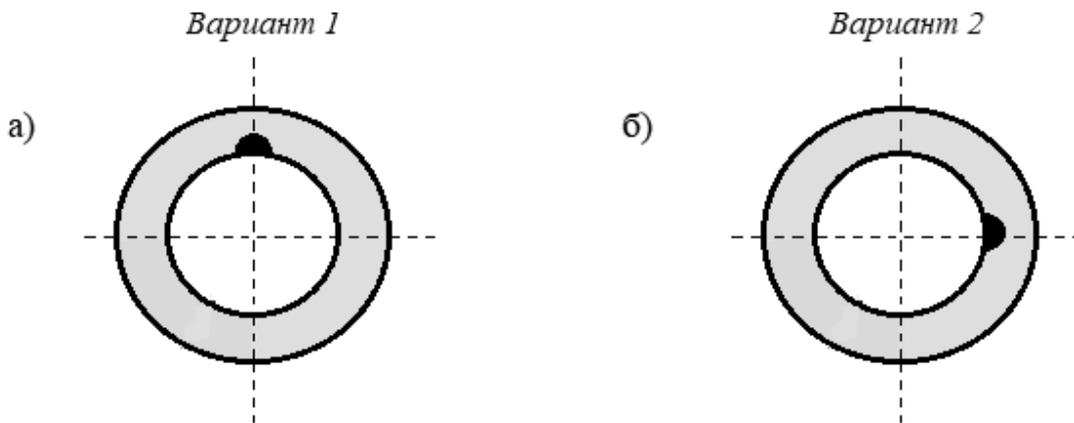


Рис. 2. Области расположения углубления на внутренней поверхности: а) при $\alpha = \pi/4$, $\beta = 0$; б) при $\alpha = \pi/4$, $\beta = -\pi/2$

Fig. 2. Locations of the depression zone on the inner surface: а) $\alpha = \pi/4$, $\beta = 0$; б) $\alpha = \pi/4$, $\beta = -\pi/2$

Далее определим координатные векторы $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$, параметры метрического тензора g_{ij} и символы Кристоффеля G_{jk}^i для дефектной области.

Разрешающие соотношения выведем из вариационного уравнения Лагранжа [33]:

$$\delta \int_V W dV = \int_V \rho f^i \delta u_i dV + \int_S p^i \delta u_i dS,$$

где W – удельная потенциальная энергия деформации трехмерного тела; f^i, p^i – контравариантные компоненты вектора массовых и поверхностных сил; ρ – массовая плотность; u_i – ковариантные компоненты вектора искомых переменных; S – поверхность боковых граней тела.

Рассматриваемую область разобьем на КЭ, а решение $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$ в каждом из них представим в виде интерполяционного кубического сплайна трех переменных [24]:

$$\begin{aligned} u &= \left[\psi_1 \left(\frac{t^1 - t_i^1}{t_{i+1}^1 - t_i^1} \right) \psi_2 \left(\frac{t^2 - t_j^2}{t_{j+1}^2 - t_j^2} \right) \psi_3 \left(\frac{t^3 - t_k^3}{t_{k+1}^3 - t_k^3} \right) \right] \otimes F_U, \\ v &= \left[\psi_1 \left(\frac{t^1 - t_i^1}{t_{i+1}^1 - t_i^1} \right) \psi_2 \left(\frac{t^2 - t_j^2}{t_{j+1}^2 - t_j^2} \right) \psi_3 \left(\frac{t^3 - t_k^3}{t_{k+1}^3 - t_k^3} \right) \right] \otimes F_V, \\ w &= \left[\psi_1 \left(\frac{t^1 - t_i^1}{t_{i+1}^1 - t_i^1} \right) \psi_2 \left(\frac{t^2 - t_j^2}{t_{j+1}^2 - t_j^2} \right) \psi_3 \left(\frac{t^3 - t_k^3}{t_{k+1}^3 - t_k^3} \right) \right] \otimes F_W, \end{aligned}$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 – векторы координатных функций по трем соответствующим координатным линиям; F_U, F_V, F_W – трехмерные матрицы компонент искомого неизвестных u, v, w и их производных соответственно.

Подставив вариации перемещений и деформаций и учитывая независимость узловых перемещений и их производных, после ряда преобразований сведем решаемую задачу к системе алгебраических уравнений вида

$$[A] \{U\} = \{R\},$$

где $[A]$ – симметричная матрица жесткости системы ленточной структуры, $\{U\}$ – вектор неизвестных, а $\{R\}$ – вектор нагрузки. При формировании матрицы жесткости все операции выполняем в матричной форме, при этом структура всех интегралов одинакова, а подынтегральные выражения для каждого КЭ вычисляем одновременно.

Алгоритм, представленный выше, был реализован в виде программного комплекса, на базе которого были решены тестовые задачи. Анализ полученных результатов показал их достоверность [14, 28, 30].

На базе разработанной математической модели [25, 26] были выполнены расчеты НДС циклической оболочки без дефекта, а также с дефектом в виде локального несквозного углубления на внутренней поверхности. Приведем некоторые результаты исследования распределения напряжений в дефектной области при варьировании геометрических параметров локального углубления, а также результаты расчетов при различном расположении зоны углубления.

2. Вычислительные эксперименты

Исследовано НДС циклической оболочки при воздействии внутреннего давления $p = 10$ МПа, закрепленной на обоих торцах по внутреннему контуру (см. рис. 1). Механические характеристики оболочки таковы: модуль упругости $E = 20000$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Геометрические параметры оболочки согласно рис. 1: толщина оболочки $h = 2$ см; радиусы $R_a = 50$ см, $R_b = 70$ см, $R_1 = 320$ см, $R_2 = 250$ см. Область разбита на 64 объемных КЭ в виде криволинейных параллелепипедов (всего 144 узла). Вычислительные эксперименты проведены при варьировании глубины дефекта t на внутренней поверхности: $t = 4$ мм, 8 мм, 12 мм и 16 мм.

Рассмотрены два варианта расположения центра дефекта на внутренней поверхности, как показано на рис. 2: при $\alpha = \pi/4$, $\beta = 0$ (вариант 1) и при $\alpha = \pi/4$, $\beta = -\pi/2$ (вариант 2).

Вариант 1. Расположение центра дефекта ($\alpha = \pi/4$, $\beta = 0$).

Исследовано изменение интенсивности напряжений σ_i в области углубления по толщине оболочки h . Рассмотрены слой, близкий к внутренней поверхности, при котором $h = 2$ мм, а также слой, близкий к наружной поверхности, при котором $h = 18$ мм. Получены зависимости изменения σ_i по толщине оболочки в зоне углубления. Установлено, что в слое $h = 2$ мм, близком к внутренней поверхности, напряжения σ_i больше, чем в слое $h = 18$ мм, близком к наружной поверхности на 28.8%.

Получены зависимости изменения интенсивности напряжений σ_i от варьирования угла β в области углубления: $\alpha = \pi/4$, $-58^\circ \leq \beta \leq 58^\circ$. Вычислительные эксперименты показали, что при увеличении глубины дефекта t интенсивность напряжений уменьшается на 6% в слое, где $h = 2$ мм. При $h = 18$ мм, наоборот, происходит незначительное увеличение σ_i на 4%.

На рис. 3 показаны зависимости изменения интенсивности напряжений σ_i от угла α в слое, близком к внутренней поверхности (см. рис. 3 а)), и слое, близком к внешней поверхности (см. рис. 3 б)) в зоне углубления, где $33^\circ \leq \alpha \leq 57^\circ$, $\beta = 0$. Получено, что при увеличении глубины дефекта t в слое, близком к внутренней поверхности, интенсивность напряжений уменьшается на 5.5%, а в слое, близком к наружной поверхности, увеличивается на 3.5%.

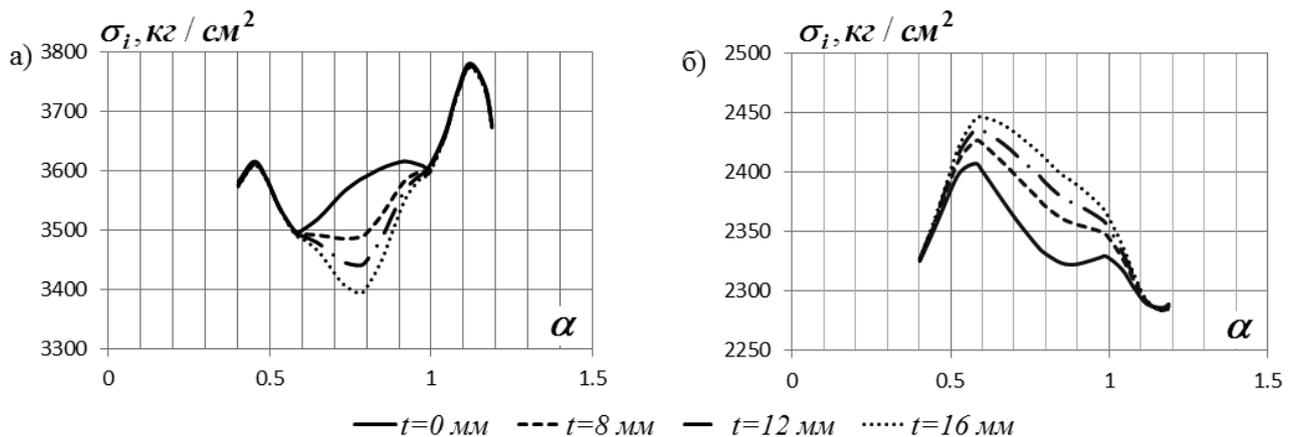


Рис. 3. Зависимость изменения интенсивности напряжений σ_i от угла α в зоне дефекта $33^\circ \leq \alpha \leq 57^\circ$, $\beta = 0$: а) в слое, близком к внутренней поверхности; б) в слое, близком к наружной поверхности

Fig. 3. Change in stress intensity σ_i depending on the angle α in the defective region for $33^\circ \leq \alpha \leq 57^\circ$, $\beta = 0$: а) in the layer adjacent to the inner surface; б) in the layer adjacent to the outer surface

Вариант 2. Расположение центра дефекта ($\alpha = \pi/4$, $\beta = -\pi/2$).

На рис. 4 представлены рассчитанные зависимости изменения интенсивности напряжений σ_i от угла α в области, где $33^\circ \leq \alpha \leq 57^\circ$, $\beta = -\pi/2$. Видно, что увеличение глубины дефекта приводит к уменьшению напряжений σ_i на 18% для слоя, близкого к внутренней поверхности. В слое, близком к наружной поверхности, напряжения σ_i незначительно увеличиваются (на 3%).

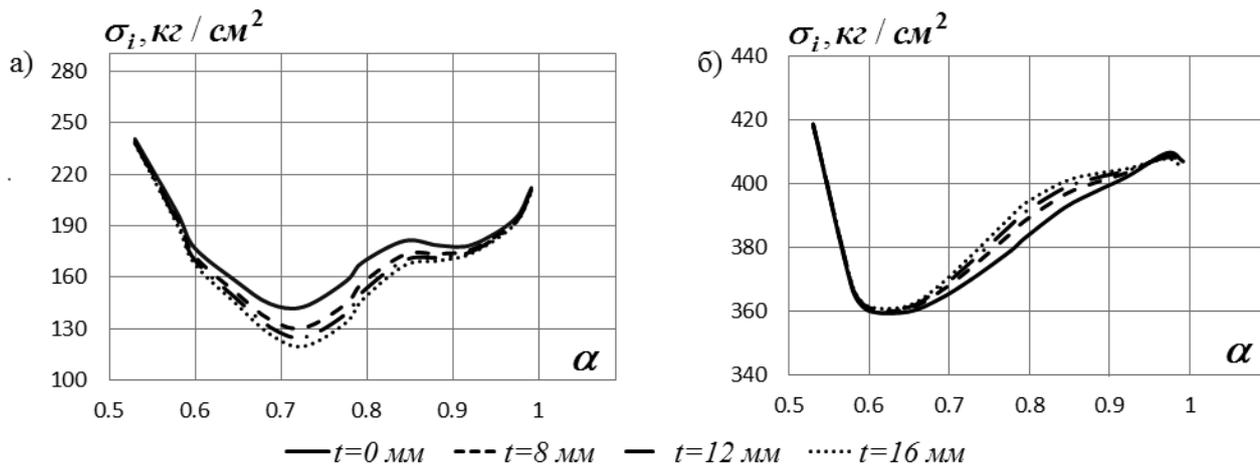


Рис. 4. Зависимость изменения интенсивности напряжений σ_i от угла α в области углубления, где $33^\circ \leq \alpha \leq 57^\circ$, $\beta = -\pi/2$: а) в слое, близком к внутренней поверхности; б) в слое, близком к наружной поверхности

Fig. 4. Change in stress intensity σ_i depending the angle α in the depression zone for $33^\circ \leq \alpha \leq 57^\circ$, $\beta = -\pi/2$: а) in the layer adjacent to the inner surface; б) in the layer adjacent to the outer surface

Заключение и выводы

1. Разработана численная модель поведения циклической оболочки с локальным углублением на ее внутренней поверхности на основе трехмерного сплайнового варианта МКЭ для оценки уровня концентрации напряжений, возникающих как в области локального углубления, так и оболочке в целом.

2. Проведены вычислительные эксперименты по определению НДС в области дефекта в виде локального углубления, расположенного на внутренней поверхности оболочки, в зависимости от расположения и параметров углубления.

3. Установлены закономерности изменения НДС циклической оболочки при варьировании геометрических параметров углубления.

4. Показано, что при изменении геометрических параметров и зоны расположения дефекта происходит существенное перераспределение напряжений как по толщине, так и по всей поверхности оболочки.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Иванов В.Н., Рыжковская М.И. Применение циклических поверхностей в архитектуре зданий, конструкций и изделий // Вестн. РУДН. Сер. Инженер. исслед. 2015. № 3. С. 111–118.
2. Bock Hyeng C.A., Yamb E.B. Application of cyclic shells in architecture, machine design, and bionics // Int. J. Mod. Eng. Res. 2012. V. 2, No 3. P. 799–806.
3. Кривошапко С.Н., Мамиева И.А. Аналитические поверхности в архитектуре зданий, конструкций и изделий. М.: Либроком, 2012. 328 с.
4. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гайдайчук В.В. Расчет оболочек сложной формы. Киев: Будивэльнык, 1990. 192 с.

5. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Классификация циклических поверхностей // Строит. мех. инж. констр. и соор. 2006. № 2. С. 25–34.
6. *Иванов В.Н., Шмелева А.А.* Геометрия и формообразование тонкостенных пространственных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей // Строит. мех. инж. констр. и соор. 2016. № 6. С. 3–8.
7. *Кокодеев А.В., Шейн А.А.* Определение напряженно-деформированного состояния горизонтальных цилиндрических стальных резервуаров с учетом повреждений коррозионного происхождения // Техн. регул. в трансп. строит. 2015. № 1 (9). С. 2–10.
8. *Седова О.С.* Новая модель механохимической коррозии тонкостенных оболочек // Проц. управл. и устойч. 2016. Т. 3, № 1. С. 265–269.
9. *Яковлев А.С.* Тонкостенные оболочки с несквозными трещиновидными дефектами в приближении Дагдейла // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2013. № 9/2 (110). С. 140–146.
10. *Игнатик А.А.* Экспериментальное и теоретическое исследование деформированного состояния дефектных зон трубопровода // Наука и технол. трубопров. трансп. нефти и нефтепрод. 2018. Т. 8, № 2. С. 147–153.
11. *Яковлев А.С.* Оценка влияния несквозных трещин (царапин) на прочность конструкций при проектировании летательных аппаратов // Вестн. Самарск. гос. аэрокосм. ун-та им. акад. С.П. Королёва (нац. исслед. ун-та). 2012. № 4 (35). С. 193–197.
12. *Якупов С.Н., Насибуллин Т.Р.* Анализ концентрации напряжений в тонкостенных элементах конструкций с локальным углублением // Строит. мех. инж. констр. и соор. 2016. № 1. С. 30–36.
13. *Гришин В.А., Гришина В.А., Реут В.В.* Напряженное состояние коробчатой оболочки при вдавливании в нее двух включений // Тр. Одесск. политех. ун-та. 2015. Т. 1, № 1 (45). С. 21–27.
14. *Krivoshapko S.N., Ivanov V.N.* Encyclopedia of Analytical Surfaces. Cham: Springer, 2015. xxix, 752 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-11773-7>.
15. *Немиш Ю.Н.* Трехмерные граничные задачи теории упругости для неканонических областей // Прикл. мех. 1980. № 16 (2). С. 3–39.
16. *Арбош И., Бабель Г.В., Баттерман С.Ч. и др.* Тонкостенные оболочечные конструкции. Теория, эксперимент и проектирование. Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1980. 607 с.
17. *Якупов Н.М.* О некоторых работах по расчету оболочек сложной геометрии // Исслед. по теор. обол.: Тр. семинара. Казань: КФТИ КФАН СССР, 1990. Вып. 25. С. 43–55.
18. *Корнишин М.С., Паймушин В.Н., Снигирев В.Ф.* Вычислительная геометрия в задачах механики оболочек. М.: Наука, 1989. 208 с.
19. *Вахитов М.Б., Паймушин В.Н., Якупов Н.М.* К решению плоской задачи подкрепленных панелей переменной жесткости // Изв. вузов. Авиац. техн. 1978. № 2. С. 9–16.
20. *Корнишин М.С., Паймушин В.Н., Якупов Н.М.* Гибкие двусвязные пластины со сложным очертанием контура // Стат. и динам. обол.: Тр. семинара. Казань, 1979. Вып. 12. С. 80–91.
21. *Паймушин В.Н., Якупов Н.М.* Большие прогибы эллиптических и круглых пластин с круглыми и эллиптическими отверстиями // Теор. и мет. расч. нелин. пластин и обол. Саратов, 1981. С. 10–12.

22. Корнишин М.С., Якупов Н.М. Сплайновый вариант метода конечных элементов для расчета оболочек сложной геометрии // Прикл. мех. 1987. Т. 23, № 3. С. 38–44.
23. Якупов Н.М. Прикладные задачи механики упругих тонкостенных конструкций. Казань: ИММ КНЦ РАН, 1994. 124 с.
24. Якупов Н.М., Киямов Х.Г., Якупов С.Н., Киямов И.Х. Моделирование элементов конструкций сложной геометрии трехмерными конечными элементами // МКМК. 2011. Т. 17, № 1. С. 145–154.
25. Yakupov S.N., Kiyatov H.G., Yakupov N.M., Mukhamedova I.Z. A new variant of the FEM for evaluation the strenght of structures of complex geometry with heterogeneous material structure // Case Stud. Constr. Mater. 2023. V. 19. Art. 02360. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2023.e02360>.
26. Корнишин М.С., Якупов Н.М. К расчету оболочек сложной геометрии в цилиндрических координатах на основе сплайнового варианта МКЭ // Прикл. мех. 1989. Т. 25, № 8. С. 53–60.
27. Yakupov N.M., Kiyatov H.G., Mukhamedova I.Z. Simulation of toroidal shell with local defect // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, No 7. P. 1310–1314. <https://doi.org/10.1134/S1995080220070434>.
28. Yakupov S.N., Kiyatov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, No 9. P. 22635–2271. <https://doi.org/10.1134/S1995080221090316>.
29. Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements // Int. J. Numer. Methods Eng. 1970. V. 2, No 3. P. 419–451. <https://doi.org/10.1002/nme.1620020310>.
30. Yakupov N.M., Kiyatov H.G., Yakupov S.N. Modelling of cyclic shells with complex geometry three-dimensional finite elements // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1158, No 4. Art. 042038. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042038>.
31. Даутов Р.З. Оценка точности схем МКЭ на основе прямоугольных элементов с численным интегрированием для оболочек сложной геометрии // Иссл. по теор. обол.: Тр. семинара. Казань, 1992. Вып. 27. С. 22–36.
32. Yakupov N.M., Kiyatov H.G., Mukhamedova I.Z. Studies about solution convergence of the spline version of the finite element method in two-dimensional and three-dimensional formulations // Lobachevskii J. Math. 2022,. V. 43, No 5. P. 1218–1223. <https://doi.org/10.1134/S1995080222080364>.
33. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Vol. 1: The basis. Butterworth-Heinemann, 2000. 689 p.

References

1. Ivanov V.N., Rynkovskaya M.I. Using circular surfaces in the architecture of the buildings, structures, and products. *Vestn. RUDN. Ser. Inzh. Issled.*, 2015, no. 3, pp. 111–118. (In Russian)
2. Bock Hyeng C.A., Yamb E.B. Application of cyclic shells in architecture, machine design, and bionics. *Int. J. Mod. Eng. Res.*, 2012. vol. 2, no. 3, pp. 799–806.
3. Krivoshapko S.N., Mamieva I.A. *Analiticheskie poverkhnosti v arkhitekture zdanii, konstruksii i izdelii* [Analytical Surfaces in the Architecture of Buildings, Structures, and Products]. Moscow, Librokom, 2012. 328 p. (In Russian)

4. Gulyaev V.I., Bazhenov V.A., Gotsulyak E.A., Gaidaichuk V.V. *Raschet obolochek slozhnoi formy* [Calculation of Complex Shells]. Kyiv, Budiviel'nyk, 1990. 192 p. (In Russian)
5. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Classification of cyclic surfaces. *Stroit. Mekh. Inzh. Konstr. Sooruzh.*, 2006, no. 2, pp. 25–34. (In Russian)
6. Ivanov V.N., Shmeleva A.A. Geometry and formation of the thin-walled shell structures based on normal cyclic surfaces. *Stroit. Mekh. Inzh. Konstr. Sooruzh.*, 2016, no. 6, pp. 3–8. (In Russian)
7. Kokodeev A.V., Shein A.A. Determining the stress-strain state of horizontal cylindrical steel tanks in connection with corrosion-induced damages. *Tekh. Regul. Transp. Stroit.*, 2015, no. 1 (9), pp. 2–10. (In Russian)
8. Sedova O.S. A new model of mechanochemical corrosion in thin-walled shells. *Protsessy Upr. Ustoich.*, 2016, vol. 3, no. 1, pp. 265–269. (In Russian)
9. Yakovlev A.S. Thin-walled shells with surface crack defects in the Dugdale approximation. *Vestn. SamGU. Estestvennonauchn. Ser.*, 2013, no. 9/2 (110), pp. 140–146. (In Russian)
10. Ignatik A.A. Experimental and theoretical study of the strain state in damaged pipeline sections. *Nauka Tekhnol. Truboprovodn. Transp. Nefti Nefteprod.*, 2018, vol. 8, no. 2, pp. 147–153. (In Russian)
11. Yakovlev A.S. Assessing the impact of non-through cracks (scratches) on the structural strength when designing aircraft. *Vestn. Samar. Gos. Aerokosm. Univ. im. Akad. S.P. Koroleva (Nats. Issled. Univ.)*, 2012, no. 4 (35), pp. 193–197. (In Russian)
12. Yakupov S.N., Nasibullin T.R. Analysis of the stress concentration in thin-walled elements of structures with local in-depth. *Stroit. Mekh. Inzh. Konstr. Sooruzh.*, 2016, no. 1, pp. 30–36. (In Russian)
13. Grishin V.A., Grishina V.A., Reut V.V. Stress state of a box shell under the indentation of two inclusions. *Tr. Odess. Politekh. Univ.*, 2015, vol. 1, no. 1 (45), pp. 21–27. (In Russian)
14. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Cham, Springer, 2015. xxix, 752 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-11773-7>.
15. Nemish Yu.N. Three-dimensional boundary-value problems of the theory of elasticity for noncanonical regions. *Sov. Appl. Mech.*, 1980, vol. 16, no. 2, pp. 85–116. <https://doi.org/10.1007/BF00885101>.
16. Arbocz J., Babel G.V., Batterman S.C., et al. *Tonkostennyye obolocheynye konstruksii. Teoriya, eksperiment i proektirovanie* [Thin-Shell Structures. Theory, Experiment and Design]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 607 p. (In Russian)
17. Yakupov N.M. On some works about the calculation of shells with complex geometry. In: *Issled. po teor. obol.: Tr. seminara* [Studies on the Theory of Shells: Proceedings of the Seminar]. Vol. 25. Kazan, KFTI KFAN SSSR, 1990, pp. 43–55. (In Russian)
18. Kornishin M.S., Paimushin V.N., Snigirev V.F. *Vychislitel'naya geometriya v zadachakh mekhaniki obolochek* [Computational Geometry in Shell Mechanics Problems]. Moscow, Nauka, 1989. 208 p. (In Russian)
19. Vakhitov M.B., Paimushin V.N., Yakupov N.M. On solution of the plane problem of reinforced panels of variable stiffness. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Aviats. Tekh.*, 1978, no. 2, pp. 9–16. (In Russian)

20. Kornishin M.S., Paimushin V.N., Yakupov N.M. Flexible doubly-connected plates with complex contours. In: *Stat. i dinam. obol.: Tr. seminara* [Statics and Dynamics of Shells: Proceedings of the Seminar]. Vol. 12. Kazan, 1979, pp. 80–91. (In Russian)
21. Paimushin V.N., Yakupov N.M. Large deflections of elliptical and circular plates with circular and elliptical holes. In: *Teor. i met. rasch. nelin. plastin i obol.* [Theory and Methods of Calculating Nonlinear Plates and Shells]. Saratov, 1981, pp. 10–12. (In Russian)
22. Kornishin M.S., Ykupov N.M. Spline variant of the finite element method for calculating shells of complex geometry. *Prikl. Mekh.*, 1987, vol. 23, no. 3, pp. 38–44. (In Russian)
23. Yakupov N.M. *Prikladnye zadachi mekhaniki uprugikh tonkostennykh konstruksii* [Applied Problems of the Mechanics of Elastic Thin-Walled Structures]. Kazan, IMM KNTs Ross. Akad. Nauk, 1994. 124 p. (In Russian)
24. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Yakupov S.N., Kiyamov I.H. Modelling of elements of designs of difficult geometry by three-dimensional finite elements. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 145–154. (In Russian)
25. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M., Mukhamedova I.Z. A new variant of the FEM for evaluation the strenght of structures of complex geometry with heterogeneous material structure. *Case Stud. Constr. Mater.*, 2023, vol. 19, art. 02360. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2023.e02360>.
26. Kornishin M.S., Yakupov N.M. Calculation of shells of complex geometry in cylindrical coordinates on the basis of a spline version of the finite-element method. *Sov. Appl. Mech.*, 1989, vol. 25, no. 8, pp. 784–790. <https://doi.org/10.1007/BF00887642>.
27. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Mukhamedova I.Z. Simulation of toroidal shell with local defect. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 7, pp. 1310–1314. <https://doi.org/10.1134/S1995080220070434>.
28. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 9, pp. 22635–2271. <https://doi.org/10.1134/S1995080221090316>.
29. Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1970, vol. 2, no. 3, pp. 419–451. <https://doi.org/10.1002/nme.1620020310>.
30. Yakupov N.M, Kiyamov H.G., Yakupov S.N. Modelling of cyclic shells with complex geometry three-dimensional finite elements. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1158, no. 4, art. 042038. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042038>.
31. Dautov R.Z. Accuracy evaluation of finite element schemes based on rectangular elements with numerical integration for complex geometry shells. In: *Issl. po teor. obol.: Tr. seminara* [Studies on the Theory of Shells: Proceedings of the Seminar]. Vol. 27. Kazan, 1992, pp. 22–36. (In Russian)
32. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Mukhamedova I.Z. Studies about solution convergence of the spline version of the finite element method in two-dimensional and three-dimensional formulations. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 5, pp. 1218–1223. <https://doi.org/10.1134/S1995080222080364>.
33. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method*. Vol. 1: The basis. Butterworth-Heinemann, 2000. 689 p.

Информация об авторах

Самат Нухович Якупов, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института механики и машиностроения, Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»

E-mail: *tamas_86@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0047-3679>

Хаким Габдрахманович Киямов, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института механики и машиностроения, Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»

E-mail: *Kijamov.hakim@yandex.ru*

Инзилия Заудатовна Мухамедова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет; старший научный сотрудник Института механики и машиностроения, Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»; старший научный сотрудник Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: *Muhamedova-inzilija@mail.ru*

Булат Фэридович Тазюков, кандидат физико-математических наук, заместитель директора по научной деятельности Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: *Bulat.Tazioukov@kpfu.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6049-6827>

Author Information

Samat N. Yakupov, Cand. Sci. (Engineering), Senior Researcher, Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences

E-mail: *tamas_86@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0047-3679>

Hakim G. Kiyamov, Cand. Sci. (Engineering), Senior Researcher, Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences

E-mail: *Kijamov.hakim@yandex.ru*

Inziliya Z. Mukhamedova, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mechanics, Kazan State University of Architecture and Engineering; Senior Researcher, Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences; Senior Researcher, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University

E-mail: *Muhamedova-inzilija@mail.ru*

Bulat F. Tazyukov, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Deputy Director for Research, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University

E-mail: *Bulat.Tazioukov@kpfu.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6049-6827>

Поступила в редакцию 17.09.2024

Принята к публикации 23.10.2024

Received September 17, 2024

Accepted October 23, 2024