

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.6: 539.3

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.169-180>

Неявная ажурная схема решения трехмерных задач теории упругости

Д.Т. Чекмарев , Е.Г. Глазова, Д.В. Седова*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия* 4ekt@mm.unn.ru

Аннотация

Рассмотрена новая неявная схема решения трехмерных динамических задач теории упругости. Для аппроксимации уравнений теории упругости по пространственным координатам использована ажурная схема метода конечных элементов на базе 4-узлового конечного элемента с линейной аппроксимацией перемещений в пределах элемента. Конечные элементы расположены по одному в центрах расчетной сетки из гексаэдрических ячеек. Благодаря этому на сетках с одинаковым размером элементов данная схема имеет в пять раз меньше конечных элементов и в два раза меньше узлов по сравнению с традиционными схемами на базе 4-узловых линейных конечных элементов. Это обуславливает её высокую экономичность. Аппроксимация уравнений по времени построена на основе неявной абсолютно устойчивой численной схемы Кранка – Николсона (метод трапеций). Обсуждена проблема эффективной применимости данной схемы – того класса задач, для решения которых она будет предпочтительнее явной схемы. Приведен пример решения тестовой модельной задачи с использованием этой схемы.

Ключевые слова: неявная схема, ажурная схема, трехмерная задача теории упругости, метод конечных элементов, схема Кранка – Николсона

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-29-00422).

Для цитирования: Чекмарев Д.Т., Глазова Е.Г., Седова Д.В. Неявная ажурная схема решения трехмерных задач теории упругости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 169–180. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.169-180>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.169-180>

Implicit rare mesh scheme for solving 3D elasticity problems

D.T. Chekmarev , E.G. Glazova, D.V. Sedova*Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia* 4ekm@mm.unn.ru

Abstract

A new implicit scheme for solving 3D dynamic elasticity problems was considered. To approximate the elasticity equations by spatial coordinates, a rare mesh FEM scheme based on a four-node finite element with a linear approximation of displacements within the element was employed. The finite elements are located in the centers of hexahedral cells, with each cell containing a single element. As a result, for meshes with the same element size, this scheme uses five times fewer finite elements and half as many nodes as traditional schemes utilizing four-node linear finite elements, which makes it highly efficient. The equations were approximated in time based on the implicit unconditionally stable Crank–Nicolson numerical scheme (trapezoidal rule). The applicability of the scheme was discussed, with a focus on the class of problems for which it outperforms the explicit scheme. An example of a test model problem solved using this scheme was provided.

Keywords: implicit scheme, rare mesh scheme, 3D elasticity problem, finite element method, Crank–Nicolson scheme

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-29-00422).

For citation: Chekmarev D.T., Glazova E.G., Sedova D.V. Implicit rare mesh scheme for solving 3D elasticity problems. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 169–180. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.169-180>. (In Russian)

Введение

Настоящая работа в некотором смысле завершает серию публикаций о реализации ажурной схемы метода конечных элементов (МКЭ) для решения трехмерных задач теории упругости и пластичности. Ранее была реализована [1] и подробно исследована [2] явная ажурная схема типа «крест» решения динамических задач. Потом была ее реализация для решения статических задач [3]. В обоих случаях схема зарекомендовала себя наилучшим образом. Особенности данной схемы являются: высокая экономичность, отсутствие нежелательных эффектов сдвигового и объемного записания и «песочных часов» [4, 5], сходимость, не уступающая традиционным схемам МКЭ, а также простота реализации.

Существует достаточно широкий класс задач, при решении которых применение неявных схем оказывается более эффективным по сравнению с явными схемами. Это обусловлено в первую очередь тем, что, исходя из условий устойчивости, шаг интегрирования по времени явной схемы ограничивается условием Куранта [6] $\tau \leq \frac{h}{c}$, где τ – шаг по времени, c – скорость звука, h – характерный минимальный размер конечного элемента. Таким образом, в случае необходимости использования мелких сеток данное ограничение является весьма обременительным, требует большого числа шагов по времени и может приводить как к большим вычислительным затратам, так и к накоплению погрешностей. Если явные схемы предпочтительнее при моделировании быстропротекающих нестационарных процессов на коротких промежутках времени (задачи «быстрой» динамики), то преимущества неявных схем проявляются на задачах «медленной» динамики. Характерными признаками последних являются задачи со сравнительно длительными по времени процессами, в которых определяющими являются длинноволновые процессы деформирования. Сравнительная эффективность неявных схем повышается также при наличии в задачах разномасштабных геометрических особенностей, являющихся концентраторами напряжений. Таковыми являются отверстия или жесткие включения малого размера по сравнению с общим размером расчетной области, требующие измельчения сетки для адекватного описания напряженно-деформированного состояния вблизи них. Отметим, что в данном случае процессы вблизи особенностей малого масштаба можно считать квазистатическими, и для их описания неявная схема предпочтительнее.

Учитывая, что вычислительные затраты на шаге по времени неявных схем значительно выше, чем у явных, в качестве критерия эффективности можно принять число Куранта k – безразмерный параметр, характеризующий отношение шага по времени к предельно допустимому шагу явной схемы: $\tau = kh/c$. Как правило, неявная схема будет предпочтительнее явной при $k \geq 10$, что в конечном счете определяется отношением вычислительных затрат на шаге по времени, которое зависит от метода решения СЛАУ, ширины ленты и т. п. Эффективные методы решения систем линейных алгебраических уравнений в рамках неявных схем описаны в [7, 8]. Актуальна проблема совместного использования явных и неявных схем. Это позволяет существенно повысить эффективность применяемых методик численного решения [9, 10].

Для аппроксимации уравнений теории упругости по времени используем схему Кранка – Николсона [11], имеющую второй порядок точности.

1. Конечный элемент ажурной схемы

Дадим краткое описание конечного элемента ажурной схемы МКЭ. Пусть расчетная область задачи покрыта сеткой из гексаэдрических ячеек. Под ажурной схемой МКЭ будем понимать численную схему на базе 4-узловых конечных элементов в виде тетраэдров с линейной аппроксимацией функций внутри элемента со следующим расположением элементов. Пусть в каждой ячейке гексаэдрической сетки находится один расчетный 4-узловой элемент в виде тетраэдра (рис. 1), а остальные 4 элемента в расчетах не участвуют.

На рис. 2 показано расположение конечных элементов, инцидентных внутреннему узлу регулярной сетки. Соседние элементы ориентированы по-разному, что необходимо для сохранения связности сетки. При этом узлы исходной гексаэдрической сетки делятся на два класса: те, которые участвуют в формировании системы уравнений (основные узлы), и те,

которые не участвуют (вспомогательные узлы). Таким образом, в ажурных схемах число расчетных узлов сокращается в два раза на сетках с ячейками (элементами) одинакового размера.

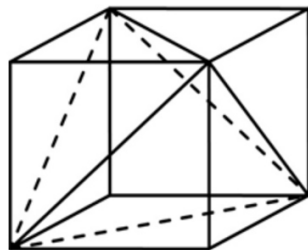


Рис. 1. Ячейка ажурной сетки

Fig. 1. Rare mesh cell

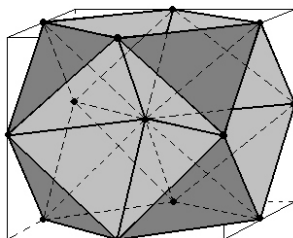


Рис. 2. Расположение конечных элементов в окрестности внутреннего узла регулярной сетки

Fig. 2. Finite elements near an interior node of the regular mesh

Все экстенсивные характеристики (объем, масса, энергия и т. д.) отсутствующих боковых элементов ячейки присоединим к единственному расчетному элементу. Построенная таким образом схема МКЭ имеет в пять раз меньше элементов и в два раза меньше узлов по сравнению с традиционной схемой на базе 4-узловой линейной конечного элемента. Иначе данную схему можно интерпретировать как схему на базе 4-узловых гексаэдрических конечных элементов.

Для формирования схемы МКЭ будем использовать векторно-матричную форму записи [11, 12]. Векторы узловых перемещений конечного элемента, приведенные векторы деформаций и напряжений запишем соответственно в виде

$$(u)^T = (u_1^1, u_1^2, u_1^3, u_2^1, u_2^2, u_2^3, u_3^1, u_3^2, u_3^3, u_4^1, u_4^2, u_4^3),$$

$$(\varepsilon)^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}), \quad (\sigma)^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}).$$

В матричной форме соотношения Коши, закон Гука и полная потенциальная энергия конечного элемента имеют вид

$$\varepsilon = Bu, \quad \sigma = C\varepsilon = CBu, \quad \Pi = \frac{1}{2}u^TKu - u^Tq, \quad (1)$$

где B – матрица деформаций, связывающая компоненты тензора деформаций с узловыми перемещениями, C – матрица упругих постоянных, K – матрица жесткости, q – вектор

внешних сил. В общем случае элементы матрицы B являются функциями пространственных координат, но для линейных конечных элементов они являются константами:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & 0 & 0 & \beta_2^1 & 0 & 0 & \beta_3^1 & 0 & 0 & \beta_4^1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1^2 & 0 & 0 & \beta_2^2 & 0 & 0 & \beta_3^2 & 0 & 0 & \beta_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1^3 & 0 & 0 & \beta_2^3 & 0 & 0 & \beta_3^3 & 0 & 0 & \beta_4^3 \\ \beta_1^1 & \beta_1^1 & 0 & \beta_2^2 & \beta_2^1 & 0 & \beta_3^2 & \beta_3^1 & 0 & \beta_4^2 & \beta_4^1 & 0 \\ 0 & \beta_1^3 & \beta_1^2 & 0 & \beta_2^3 & \beta_2^2 & 0 & \beta_3^3 & \beta_3^2 & 0 & \beta_4^3 & \beta_4^2 \\ \beta_1^3 & 0 & \beta_1^1 & \beta_2^3 & 0 & \beta_2^1 & \beta_3^3 & 0 & \beta_3^1 & \beta_4^3 & 0 & \beta_4^1 \end{pmatrix}.$$

Матрица упругих постоянных имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Здесь β_j^i – коэффициенты сеточных дифференциальных операторов, λ, μ – константы Ламе.

Матрица жесткости конечного элемента записывается в виде [11] $K = \int B^T C B dV$. С учетом того, что подынтегральное выражение постоянно в пределах конечного элемента, матрица жесткости примет вид $K = B^T C B \Delta V$, где ΔV – объем элемента (гексаэдра). Ненулевые элементы матрицы B являются коэффициентами сеточных операторов, аппроксимирующих первые частные производные в элементе. Данные операторы могут быть представлены в виде

$$d_i^+ f = \sum_{j=1}^m \beta_j^i f_j = \frac{\partial f}{\partial x^i} + O(h).$$

Здесь m – число узлов в элементе, f_j – значения функции в узлах элемента. Операторы (1) вычислим следующим образом. Объем тетраэдра можно записать как $\det V/6$, где V – квадратная матрица,

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4^1 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 - x_4^1 & x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \\ x_2^1 - x_4^1 & x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \\ x_3^1 - x_4^1 & x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \end{bmatrix}.$$

Формула для аппроксимации производных в конечном элементе имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\det V_j}{\det V}.$$

Матрица V_j получается из V заменой j -го столбца столбцом $\text{col}(f_1 - f_m, \dots, f_{m-1} - f_m)$:

$$V_1 = \begin{bmatrix} f_1 - f_4 & x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \\ f_2 - f_4 & x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \\ f_3 - f_4 & x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} x_1^1 - x_4^1 & f_1 - f_4 & x_1^3 - x_4^3 \\ x_2^1 - x_4^1 & f_2 - f_4 & x_2^3 - x_4^3 \\ x_3^1 - x_4^1 & f_3 - f_4 & x_3^3 - x_4^3 \end{bmatrix},$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} x_1^1 - x_4^1 & x_1^2 - x_4^2 & f_1 - f_4 \\ x_2^1 - x_4^1 & x_2^2 - x_4^2 & f_2 - f_4 \\ x_3^1 - x_4^1 & x_3^2 - x_4^2 & f_3 - f_4 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что коэффициенты операторов (1) d_1^+, d_2^+, d_3^+ выражаются через миноры:

$$\beta_1^1 = \frac{\begin{vmatrix} x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \\ x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \end{vmatrix}}{\det V}, \quad \beta_2^1 = \frac{\begin{vmatrix} x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \\ x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \end{vmatrix}}{\det V},$$

$$\beta_3^1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \\ x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \end{vmatrix}}{\det V}, \quad \beta_4^1 = -\beta_1^1 - \beta_2^1 - \beta_3^1,$$

и т. д. Аналогичные формулы для коэффициентов матрицы деформаций линейного 4-узлового элемента приведены в [12].

2. Неявная схема

Известно несколько вариантов построения неявных схем решения динамических задач теории упругости [11, 13]: методы Хаболта, Вилсона, Ньюмарка, Кранка – Николсона. Для реализации ажурной схемы рассмотрим метод трапеций (схему Кранка – Николсона) в полном соответствии с описанием, приведенным в [11].

Пусть $\{u\}$ – глобальный вектор узловых перемещений, $\{v\}$ – глобальный вектор узловых скоростей, $\{P\}$ – глобальный вектор внешних сил; $[K]$ – глобальная матрица жесткости, $[M]$ – глобальная матрица масс. Запишем уравнения движения упругой среды в виде

$$\{\dot{u}\} = \{v\}, \quad [M]\{\dot{v}\} = -[K]\{u\} + \{P\}.$$

Для аппроксимации этого уравнения запишем двухслойную по времени разностную схему, симметричную для правых частей уравнений относительно временных слоев (метод трапеций). Такая симметрия гарантирует второй порядок аппроксимации, а также абсолютную устойчивость схемы. Схема имеет вид

$$\frac{1}{\tau} (\{u^{k+1}\} - \{u^k\}) = \frac{1}{2} (\{v^{k+1}\} + \{v^k\}),$$

$$[M]\frac{1}{\tau} (\{v^{k+1}\} - \{v^k\}) = -[K]\frac{1}{2} (\{u^{k+1}\} + \{u^k\}) + \frac{1}{2} (\{P^{k+1}\} + \{P^k\}).$$

Для решения данной системы выразим $\{u^{k+1}\}$ из первого уравнения и подставим во второе. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных скоростей $\{v^{k+1}\}$ в виде

$$\left(\frac{1}{\tau}[M] + \frac{\tau}{4}[K] \right) \{v^{k+1}\} = \left(\frac{1}{\tau}[M] - \frac{\tau}{4}[K] \right) \{v^k\} - [K]\{u^k\} + \frac{1}{2} (\{P^{k+1}\} + \{P^k\}). \quad (2)$$

После решения системы (2) найдем вектор перемещений $\{u^{k+1}\}$ по формулам

$$\{u^{k+1}\} = \{u^k\} + \frac{\tau}{2} (\{v^{k+1}\} + \{v^k\}).$$

Матрицу масс примем в диагональном виде. Для решения системы линейных алгебраических уравнений используем метод квадратного корня [14]. Отметим, что на одинаковых сетках конечных элементов у ажурной схемы ширина ленты матрицы системы примерно в два раза уже по сравнению с традиционными схемами и число уравнений в два раза меньше, благодаря чему её вычислительная эффективностькратно (от двух раз и выше) превосходит эффективность других неявных схем.

3. Численные результаты

В работе [15] рассмотрены результаты решения задачи о раскрытии плоской стержневой системы, состоящей из трех гибких стержней (рис. 3), соединенных последовательно с помощью специальных шарниров. Моделировался принудительный взаимный поворот смежных стержней. Отмечено, что попытка решить задачу в рамках стержневой модели с использованием явной схемы окончилась неудачей. Явная схема при описании колебаний конструкции при больших перемещениях привела к накоплению ошибок и заметному искажению как формы колебаний конструкции, так и амплитудно-частотных характеристик после полного раскрытия. В результате задача была решена с использованием неявной схемы и метода продолжения решения по наилучшему параметру [16]. Позже данная задача была решена также и с использованием явной схемы на основе стержневой модели типа Тимошенко [17] с применением специального приема увеличения временного шага интегрирования до числа Куранта, равного 1 относительно шага сетки. Отметим, что в условии устойчивости Куранта явной схемы «крест» решения уравнений теории стержней типа Тимошенко одним из характерных размеров является толщина стержня. Специальный прием позволил снять это ограничение и тем самым увеличить шаг интегрирования по времени в двадцать шесть раз. Без этого приема явная схема показала совершенно неудовлетворительные результаты.

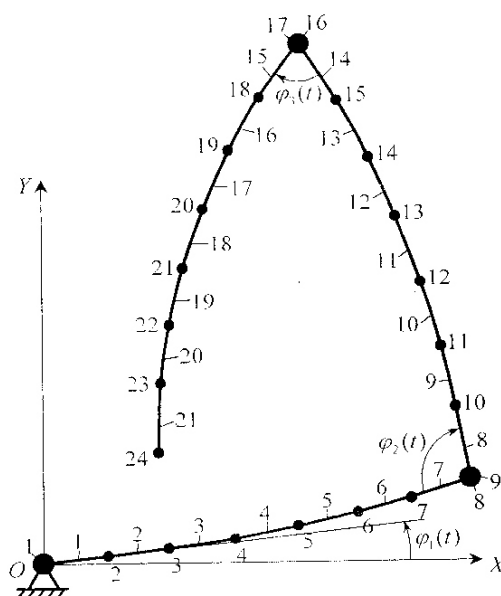


Рис. 3. Раскрытие плоской стержневой системы

Fig. 3. Deployment of the planar rod system

В качестве тестовой рассмотрим похожую, но более простую задачу о колебаниях консольной балки под действием мгновенно приложенной сосредоточенной поперечной нагрузки. Задача решалась в трехмерной геометрически и физически линейной постановке.

Стержень длиной $L = 100$ см квадратного сечения $H_1 = H_2 = 1$ см зашцеилен на левом торце. На расстоянии $L/2 = 50$ см от заделки (в середине бруса) мгновенно прикладывается постоянная по времени сосредоточенная поперечная нагрузка $F = 2000$ н. Механические свойства материала: $\rho = 7.8$ г/см³, $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Используем равномерную сетку $4 \times 4 \times 40$ ячеек в форме прямоугольного параллелепипеда со сторонами $h_1 = h_2 = 0.25$ см, $h_3 = 2.5$ см. Расчеты по неявной схеме проводились с числами Куранта $k = 10$ и $k = 20$. Результаты решения задачи приведем в безразмерных величинах: прогибы $w^* = w/w_{\max}$, где $w_{\max}$ – максимальный прогиб, полученный для решения при $k = 10$; скорости $v^* = v/v_{\max}$, где $v_{\max}$ – максимальная скорость, полученная для решения при $k = 10$; время $t^* = t^*c/L$. Здесь c – скорость звука. На рис. 4 показаны графики прогибов стержня в моменты достижения максимума $t^* = 125$ и минимума $t^* = 250$.

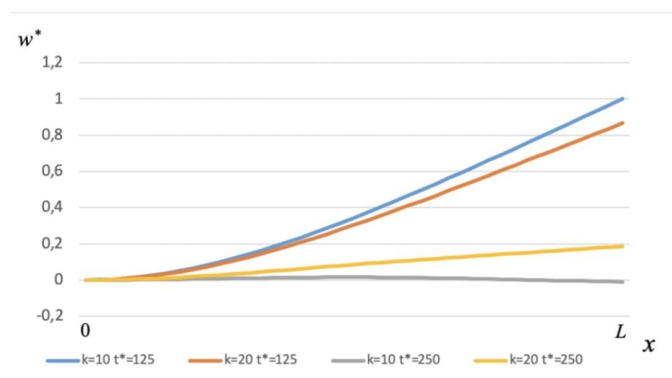


Рис. 4. Прогибы стержня в моменты достижения максимума и минимума

Fig. 4. Rod deflections, maximum and minimum values

На рис. 5. приведены зависимости скорости свободного конца стержня от времени, полученные при разных значениях числа Куранта.

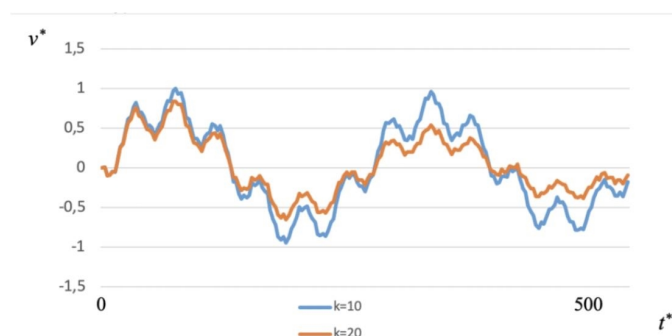


Рис. 5. Скорость свободного конца стержня в зависимости от времени при $k = 10$ и при $k = 20$

Fig. 5. Velocity of the free end of the rod over time for $k = 10$ and $k = 20$

Представленные результаты демонстрируют работоспособность неявной схемы. Необходимо отметить, что при увеличении шага интегрирования по времени наблюдается заметный численный эффект затухания колебаний. По-видимому, данная неявная схема обладает схемной вязкостью, монотонно зависящей от числа Куранта.

Заключение

Предложена новая неявная схема решения трехмерных динамических задач теории упругости на основе ажурной схемы аппроксимации по пространственным переменным и схемы Кранка – Николсона интегрирования по времени. Описаны возможные преимущества данной схемы по сравнению с известными схемами МКЭ. Согласно опыту реализации и исследования свойств аналогичной явной схемы, можно утверждать, что данная схема обладает лучшей сходимостью и отсутствием нежелательных эффектов сдвигового запираания и неустойчивости типа «песочные часы» по сравнению с традиционными схемами. Рассмотрен класс задач для эффективного применения неявных схем. Поскольку на решенной тестовой задаче схема демонстрирует заметную схемную вязкость, это накладывает дополнительные ограничения на её применение к моделированию процессов без диссипации. Весьма перспективным может быть её использование в комбинации с явными схемами [9, 10].

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Жидков А.В., Зефирова С.В., Кастальская К.А., Спиринов С.В., Чекмарев Д.Т. Ажурная схема численного решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности // Вестн. ННГУ. 2011. № 4 (4). С. 1480–1482.
2. Крутова К.А. Численное решение трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности на основе ажурной вариационно-разностной схемы: автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 2015.
3. Жидков А.В., Спиринов С.В., Чекмарев Д.Т. Ажурная схема метода конечных элементов решения статических задач теории упругости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2012. Т. 154, кн. 4. С. 26–32.
4. Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials // Int. J. Mech. Sci. 2001. V. 43, No 7. P. 1579–1589. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00100-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4).
5. Coombs W.M., Charlton T.J., Cortis M., Augarde Ch.E. Overcoming volumetric locking in material point methods // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2018. V. 333. P. 1–21. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.010>.
6. Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики // УМН. 1941. № 8. С. 125–160.
7. Бураго Н.Г., Никитин И.С. Безматричная реализация неявных схем методом сопряженных градиентов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58, № 8. С. 50–61.

8. *Tovbis E., Krutikov V., Stanimirović P., Meshechkin V., Popov A., Kazakovtsev L.* A family of multi-step subgradient minimization methods // *Mathematics*. 2023. V. 11, No 10. Art. 2264. <https://doi.org/10.3390/math11102264>.
9. *Carson A.M., Banks J.W., Henshaw W.D., Schwendeman D.W.* High-order accurate implicit-explicit time-stepping schemes for wave equations on overset grids. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.14592>.
10. *Golubev V.I., Nikitin I.S., Mi X.* Numerical schemes of higher approximation orders for dynamic problems of elastoviscoplastic media // *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.* 2024. Т. 17, № 1. С. 8–17.
11. *Голованов А.И., Бережной Д.В.* Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. Казань: ДАС, 2001. 300 с.
12. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
13. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов / пер. с англ. А.С. Алексеева и др.; под ред. А.Ф. Смирнова. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
14. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: учеб. пособие для вузов. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. 432 с.
15. *Данилин А.Н., Марков А.В.* Моделирование динамики разворачивания гибких стержневых систем при различных способах изменения их начальной геометрии // Матер. VIII Междунар. симпоз. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Ярополец, 11–15 февр. 2002 г.). Москва, 2002. 61 с.
16. *Шалашин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 222 с.
17. *Баженов В.Г., Ломунов В.К.* Методика расчета динамического деформирования геометрически изменяемых плоских стержневых систем // Пробл. прочн. и пласт.: межвуз. сб. научн. тр. ННГУ. 2002. Вып. 64. С. 55–63.

References

1. *Zhidkov A.V., Zefirov S.V., Kastalskaya K.A., Spirin S.V., Chekmarev D.T.* Rare mesh scheme for solution of three-dimensional dynamic problems of elasticity and plasticity. *Vestn. NNGU*, 2011, no. 4 (4), pp. 1480–1482. (In Russian)
2. *Krutova K.A.* Numerical solution of three-dimensional dynamic problems of the elasticity and plasticity theory based on a rare variational-difference scheme. *Extended Abstract of Cand. Sci. (Physics and Mathematics) Diss.* Nizhny Novgorod, 2015. (In Russian)
3. *Zhidkov A.V., Spirin S.V., Chekmarev D.T.* A rare mesh finite element scheme for solving static elasticity problems. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, vol. 154, no. 4, pp. 26–32. (In Russian)
4. *Lakes R.* Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials. *Int. J. Mech. Sci.*, 2001, vol. 43, no. 7, pp. 1579–1589. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00100-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4).

5. Coombs W.M., Charlton T.J., Cortis M., Augarde Ch.E. Overcoming volumetric locking in material point methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2018, vol. 333, pp. 1–21. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.010>.
6. Courant R., Friedrichs K., Lewy G. On difference equations of mathematical physics. *Usp. Mat. Nauk*, 1941, no. 8, pp. 125–160. (In Russian)
7. Burago N.G., Nikitin I.S. Matrix-free conjugate gradient implementation of implicit schemes. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 8, pp. 1247–1258. <https://doi.org/10.1134/S0965542518080043>.
8. Tovbis E., Krutikov V., Stanimirović P., Meshechkin V., Popov A., Kazakovtsev L. A family of multi-step subgradient minimization methods. *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 10, art. 2264. <https://doi.org/10.3390/math11102264>.
9. Carson A.M., Banks J.W., Henshaw W.D., Schwendeman D.W. High-order accurate implicit-explicit time-stepping schemes for wave equations on overset grids. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.14592>.
10. Golubev V.I., Nikitin I.S., Mi X. Numerical schemes of higher approximation orders for dynamic problems of elastoviscoplastic media. *Zh. SFU. Ser. Mat. Fiz.*, 2024, vol. 17, no. 1, pp. 8–17. (In Russian)
11. Golovanov A.I., Berezhnoi D.V. *Metod konechnykh elementov v mekhanike deformiruemyykh tverdykh tel* [Finite Element Method in Mechanics of Deformable Solids]. Kazan, DAS, 2001. 300 p. (In Russian)
12. Zienkiewicz O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [The Finite Element Method in Engineering Science]. Moscow, Mir, 1975. 541 p. (In Russian)
13. Bathe K., Wilson E. *Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov* [Numerical Methods in Finite Element Analysis]. Alekseev A.S. et al. (Trans.). Smirnov A.F. (Ed.). Moscow, Stroiizdat, 1982. 448 p. (In Russian)
14. Samarskii A.A., Gulín A.V. *Chislennyye metody. Ucheb. posobie dlya vuzov* [Numerical Methods: A Textbook for Universities]. Moscow, Nauka, Gl. Red. Fiz.-Mat. Lit., 1989. 432 p. (In Russian)
15. Danilin A.N., Markov A.V. Modeling the dynamics of flexible rod systems unfolding with various initial geometry transformations. *Mater. VIII Mezhdunar. simpoz. "Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksii i sploshnykh sred"* (Yaropolets, 11–15 fevr. 2002 g.) [Proc. VIII Int. Symp. "Dynamic and Technological Problems of Structural and Continuous Media Mechanics" (Yaropolets, February 11–15, 2002)]. Moscow, 2002, p. 61. (In Russian)
16. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. *Metod prodolzheniya resheniya po parametru i nailuchshaya parametrizatsiya v prikladnoi matematike i mekhanike* [Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics]. Moscow, Ed. URSS, 1999. 224 p. (In Russian)
17. Bazhenov V.G., Lomunov V.K. Methodology for calculating the dynamic deformation of geometrically variable flat rod systems. *Probl. Prochn. Plast.*, 2002, no. 64, pp. 55–63. (In Russian)

Информация об авторах

Дмитрий Тимофеевич Чекмарев, доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник Научно-исследовательского института механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

E-mail: *4ekm@mm.unn.ru*

Елена Геннадьевна Глазова, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

E-mail: *glazova@mech.unn.ru*

Дарья Владимировна Седова, младший научный сотрудник Научно-исследовательского института механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

E-mail: *iPad.0303@yandex.ru*

Author Information

Dmitry T. Chekmarev, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Leading Researcher, Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

E-mail: *4ekm@mm.unn.ru*

Elena G. Glazova, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

E-mail: *glazova@mech.unn.ru*

Elena G. Glazova, Junior Researcher, Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

E-mail: *iPad.0303@yandex.ru*

Поступила в редакцию 30.09.2024

Принята к публикации 24.12.2024

Received September 30, 2024

Accepted December 24, 2024