

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.9

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.150-168>**Радиально-симметричные решения задачи Неймана
для уравнения с p -лапласианом****А.С. Терсенов¹ ✉, Р.Ч. Сафаров^{2,3}**¹*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия*²*Новосибирский научно-исследовательский государственный университет, г. Новосибирск, Россия*³*Каршинский государственный университет, г. Карши, Узбекистан*✉ aterseno@math.nsc.ru**Аннотация**

Рассмотрена задача Неймана для уравнения с p -лапласианом и младшим членом, не удовлетворяющим условию Бернштейна–Нагумо. Исследована разрешимость задачи в классе радиально-симметричных решений. Определен класс градиентных нелинейностей, для которого доказано существование слабого соболевского радиально-симметричного решения с производной, непрерывной по Гёльдеру с показателем $\frac{1}{p-1}$.

Ключевые слова: уравнение с p -лапласианом, условие Бернштейна–Нагумо, радиально-симметричное решение, априорная оценка

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

Для цитирования: Терсенов А.С., Сафаров Р.Ч. Радиально-симметричные решения задачи Неймана для уравнения с p -лапласианом // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 150–168. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.150-168>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.150-168>

On radially symmetric solutions of the Neumann boundary value problem for the p -Laplace equation

Ar.S. Tersenov¹✉, R.C. Safarov^{2,3}

¹*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

³*Karshi State University, Karshi, Republic of Uzbekistan*

✉ aterseno@math.nsc.ru

Abstract

The Neumann boundary value problem for the p -Laplace equation with a low order term that does not satisfy the Bernstein–Nagumo condition was studied. The solvability of the problem in the class of radially symmetric solutions was investigated. A class of gradient nonlinearities was defined, for which the existence of a weak Sobolev radially symmetric solution that has a Hölder continuous derivative with exponent $\frac{1}{p-1}$ was proved.

Keywords: p -Laplace equation, Bernstein–Nagumo condition, radially symmetric solution, a priori estimate

Acknowledgments. This study was carried out as part of state assignment no. FWNF-2022-0008 to the Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences.

For citation: Tersenov Ar.S., Safarov R.C. On radially symmetric solutions of the Neumann boundary value problem for the p -Laplace equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 150–168.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.150-168>. (In Russian)

Введение

Рассмотрим задачу Неймана для уравнения

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = F(x, u, \nabla u) \quad \text{в} \quad B_R \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial B_R} = 0, \quad (2)$$

где B_R – шар радиуса R , ∂B_R – граница B_R , ν – вектор внешней нормали к ∂B_R , постоянная $p > 2$.

Один из основных подходов к исследованию краевых задач для уравнения (1) базируется на методах вариационного исчисления, что связано с вариационностью главной части указанных уравнений. Наличие в уравнении градиентных членов существенно осложняет применение этих методов. В этом случае для доказательства разрешимости краевых задач широко используются топологические методы, основанные на получении априорных оценок, а также различные аппроксимационные методы.

Исследованию разрешимости краевых задач для уравнения (1) посвящено большое количество работ. Отметим среди них те, в которых исследование краевых задач проводилось при наличии градиентных членов. В работах [1–4] авторы применили аппроксимационные методы для доказательства существования слабых решений краевых задач для (1). В [5–10] с помощью различных топологических методов, основанных на теоремах лиувилевского типа и методе суб- и суперрешений с последующим применением теоремы Красносельского, доказаны аналогичные результаты. В [11] результаты о существовании решений были получены на основе метода горного перевала. В [12, 13] авторы для получения существования решений использовали принцип неподвижной точки Лерэ–Шаудера, применив методы линеаризации, априорные оценки с весами и теоремы сравнения. В работах [14–17] были исследованы вопросы существования и множественности радиально-симметричных решений задачи Неймана для уравнения с p -лапласианом.

Все перечисленные выше результаты были получены в предположении, что $F(x, u, q)$ удовлетворяет условию Бернштейна–Нагумо

$$|F(x, u, q)| \leq c(1 + |q|^p) \quad \text{для} \quad (x, u, q) \in \bar{\Omega} \times [-M, M] \times \mathbb{R}^n \quad (3)$$

с некоторой постоянной c при условии, что решение удовлетворяет условию $\max |u| \leq M$ с некоторой постоянной M . Нас интересует разрешимость задачи (1), (2) в случае, когда функция $F(x, u, q)$ имеет произвольный рост по переменной q . Отметим, что в [18] были получены результаты о существовании решения, когда условие (3) не выполнено, при определенных условиях малости на коэффициенты уравнения. Нелинейность по градиенту предполагалась не более чем полиномиальной.

Новизна наших результатов заключается в доказательстве существования решения при нарушении условия Бернштейна–Нагумо без каких-либо условий малости входных данных краевой задачи. Более того, наши результаты допускают произвольный рост решения, в том числе экспоненциальный.

В [19–21] было доказано существование радиально-симметричных решений задачи Дирихле для (1), когда условие (3) не выполнено. В настоящей статье мы докажем аналогичные результаты для задачи Неймана.

Будем предполагать, что функция $F(x, u, \nabla u)$ может быть представлена в виде $F(r, u, u_r)$ при замене переменных $r = |x|$. Примерами таких функций являются функции вида

$$F(|x|, u, |\nabla u|), \quad F(|x|, u, x \cdot \nabla u),$$

где $x \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}$. В дальнейшем производную функции u по переменной r будем обозначать u' . Как известно, ограниченное радиально-симметричное решение (1), (2) удовлетворяет уравнению

$$-(|u'|^{p-2}u')' - \frac{n-1}{r}|u'|^{p-2}u' = F(r, u, u'), \quad r \in (0, R), \quad (4)$$

и краевым условиям

$$u'(0) = u'(R) = 0. \quad (5)$$

Учитывая вырожденность уравнения (4), можно предположить, что его решения могут не принадлежать пространству $\mathbb{C}^2$. В связи с этим дадим определение того, что мы понимаем под решением задачи (4), (5).

Определение 1. Будем говорить, что функция $u(r)$ является слабым решением задачи (4), (5), если $u'(r)$ непрерывна по Гёльдеру на $[0, R]$, удовлетворяет (5), и имеет место интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \int_0^R |u'(r)|^{p-2} u'(r) \phi'(r) dr = \\ & = \int_0^R \frac{n-1}{r} |u'(r)|^{p-2} u'(r) \phi(r) dr + \int_0^R F(r, u(r), u'(r)) \phi(r) dr \\ & \quad \forall \phi(r) \in \mathbb{C}_0^\infty(0, R). \end{aligned}$$

Краевые условия (5) понимаем в обычном смысле.

Предположим без ограничения общности, что функция F имеет вид

$$F(r, u, u') = h(r, u) + g(r, u, u') + f(r), \quad h(r, 0) = g(r, u, 0) = 0, \quad (6)$$

причем $f(r)$ не обращается тождественно в нуль и

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} |h(r, u)| = \infty, \quad (7)$$

$$u h(r, u) < 0, \quad u \neq 0. \quad (8)$$

Например, условиям (7) и (8) удовлетворяет функция $h(r, u) = -u|u|^s$, $s > 0$.

Положим

$$F_+ = \max_{[0, R] \times [-M, M]} F(r, u, 0), \quad F_- = \min_{[0, R] \times [-M, M]} F(r, u, 0), \quad \max_{r \in [0, R]} |f| = f_0.$$

Введем постоянные $C_1 > 0$ и C_2 , связанные следующим соотношением:

$$C_2 > C_1 R + \left(\frac{F_+ - F_-}{2(p-1)C_1} \right)^{\frac{1}{p-2}}. \quad (9)$$

Предположим, что $g(r, u, u')$ удовлетворяет условиям

$$|g(r, u, q) - g(s, u, q)| \leq K(r, s, u, q)(r - s) \quad (10)$$

для $r, s \in (0, R)$, $0 < r - s$, $|u| \leq M$, $q \in [-C_2, C_1 R - C_2] \cup [C_2 - C_1 R, C_2]$, где $K \geq 0$,

$$g(r, u_2, q) - g(r, u_1, q) \geq \gamma(r, u_1, u_2, q)(u_1 - u_2) \quad (11)$$

для $r \in (0, R)$, $|u_1|, |u_2| \leq M$, $u_1 > u_2$, $q \in [-C_2, C_1 R - C_2] \cup [C_2 - C_1 R, C_2]$, $\gamma(r, u_1, u_2, q) \geq 0$.

Обозначим через $\mathbf{V}$ следующее множество:

$$\mathbf{V} = \left\{ (r, s) \in (0, R), \quad s < r, \quad |u_1|, |u_2| \leq M, \quad u_1 - u_2 \geq \left(C_2 - \frac{C_1}{2}(r - s) \right) (r - s) \right\}.$$

Предположим, что для любых $(r, s, u_1, u_2) \in \mathbf{V}$ выполнено неравенство

$$K(r, s, u_1, \pm [C_2 - C_1(r - s)]) - \\ - \gamma(r, u_1, u_2, \pm [C_2 - C_1(r - s)]) \left(C_2 - \frac{C_1}{2}(r - s) \right) \leq 0. \quad (12)$$

Теорема 1. Пусть функция $F(r, u, u')$ из (6) непрерывна по совокупности своих аргументов и удовлетворяет условиям (7), (8) и (10)–(12). Тогда существует слабое решение задачи (4), (5), удовлетворяющее неравенству

$$|u| \leq M, \quad |u'| \leq C_2,$$

где C_2 определяется из (9), а $M = M(f_0, h)$ – некоторая постоянная, зависящая от f_0 и h .

Ниже мы приведем несколько простых примеров функции g , удовлетворяющей (10)–(12). Во всех примерах для простоты ограничимся случаем $h(r, u) \equiv -u$.

Пример 1. Рассмотрим в B_R уравнение

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = -u + \frac{1}{|x|^{2k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i} \right)^{2k+1} - u |\nabla u|^\nu + f(|x|), \quad (13)$$

где $\nu > 0$, $k \geq 0$ – целое. Радиально-симметричное решение (13) удовлетворяет уравнению

$$-(|u'|^{p-2} u')' - \frac{n-1}{r} |u'|^{p-2} u' = -u + r u'^{2k+1} - u |u'|^\nu + f(r), \quad r \in (0, R).$$

Из (9) следует, что постоянная C_2 может быть выбрана сколь угодно большой. Таким образом, функция $g = r u'^{2k+1} - u |u'|^\nu$ удовлетворяет (10)–(12) при $2k \leq \nu$. Как следствие, задача (13), (5) имеет слабое в смысле определения 1 радиально-симметричное решение при $2k \leq \nu$. В случае, когда C_2 удовлетворяет неравенству $C_2 \leq 1$ (что соответствует определенным условиям малости размеров области или малости f_0), разрешимость (13), (5) имеет место при $2k > \nu$.

Пример 2. Рассмотрим в B_R уравнение

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = -u - u e^{|x|^{1-\mu} \left(\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i} \right)^\mu} + f(|x|). \quad (14)$$

Радиально-симметричное решение (14) удовлетворяет следующему уравнению:

$$-(|u'|^{p-2} u')' - \frac{n-1}{r} |u'|^{p-2} u' = -u - u e^{r u'^\mu} + f(r), \quad r \in (0, R).$$

Функция $g = -u e^{r u'^\mu}$ удовлетворяет (10)–(12) с постоянной $\mu < 1$, значит, задача (14), (5) имеет слабое в смысле определения 1 радиально-симметричное решение при указанном μ . Заметим, что при $\mu \geq 1$ разрешимость задачи (14), (5) может быть получена лишь при определенных условиях малости входных данных.

Пример 3. Рассмотрим в B_R уравнение

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = -u + \frac{1}{|x|^{2k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i} \right)^{2k+1} - u e^{|\nabla u|} + f(|x|). \quad (15)$$

Радиально-симметричное решение (15) удовлетворяет следующему уравнению:

$$-(|u'|^{p-2}u')' - \frac{n-1}{r}|u'|^{p-2}u' = -u + ru'^{2k+1} - ue^{|u'|} + f(r), \quad r \in (0, R).$$

Из (10) и (11) следует, что

$$K(r, s, u, q) = q^{2k+1}, \quad \gamma(r, u_1, u_2, q) = e^{|q|},$$

значит, (12) примет вид

$$\begin{aligned} & (\pm [C_2 - C_1(r-s)])^{2k+1} - e^{(\pm [C_2 - C_1(r-s)])} \left(C_2 - \frac{C_1}{2}(r-s) \right) \leq \\ & \leq (\pm [C_2 - C_1(r-s)])^{2k+1} - e^{(\pm [C_2 - C_1(r-s)])} (C_2 - C_1(r-s)) \leq 0 \end{aligned}$$

при достаточно большом C_2 . Как следствие, задача (15), (5) имеет слабое в смысле определения 1 радиально-симметричное решение.

Для построения решения исходной задачи применим аппроксимационную технику, разработанную в [19–21]. Доказательство теоремы 1 разбито на два этапа.

На первом этапе проведены регуляризация исходной задачи и построение последовательности классических решений регуляризованных задач. Доказательство существования классических решений получено с помощью принципа неподвижной точки, для использования которого необходимо получить ряд априорных оценок. Имея эти оценки, уже можно применить принцип неподвижной точки и доказать существование классического решения.

На втором этапе осуществлен предельный переход по параметру регуляризации. Учитывая тот факт, что полученные оценки не зависят от параметра регуляризации, предельный переход может быть осуществлен, а полученная предельная функция имеет гладкость, указанную в теореме.

Главным отличием настоящей статьи является рассмотрение задачи Неймана вместо задачи Дирихле, которая была исследована в предыдущих работах. Также можно отметить более общие и точные ограничения на функцию g , позволяющие доказать разрешимость краевых задач в классе радиально-симметричных решений.

Статья организована следующим образом. В первом разделе получена априорная оценка классического решения регуляризованной задачи, во втором – априорная оценка производной классического решения регуляризованной задачи. В третьем разделе приведено доказательство одной вспомогательной леммы (лемма 3), на которой базируется доказательство существования классического решения регуляризованной задачи (см. теорему 2), а также доказательство существования слабого в смысле определения 1 решения задачи (4) и (5) (см. теорему 1).

1. Априорная оценка максимума модуля регуляризованной задачи

Рассмотрим регуляризацию уравнения (4) вида

$$-((u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u')' - \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u' = F(r, u, u'). \quad (16)$$

Краевые условия (5) оставим без изменения. Перепишем (16) в недивергентном виде

$$-a_\varepsilon(u')u'' - \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u' = F(r, u, u'), \quad (17)$$

где постоянная $\alpha \in (0, 1)$ такова, что $(u'^\alpha)^{\frac{p-2}{\alpha}} = |u'|^{p-2}$ и

$$a_\varepsilon(z) = ((p-1)z^\alpha + \varepsilon)(z^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}-1}.$$

Нетрудно видеть, что $a_\varepsilon(z)$ является четной функцией по z .

Лемма 1. Пусть $F \in \mathbb{C}(\overline{B}_R \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Тогда для любого классического решения задачи (17), (5) имеет место оценка $|u(r)| \leq M(f_0, h)$ с некоторой постоянной M , зависящей от f_0 и h .

Доказательство. Пусть в точке $r = r_0 \in (0, R)$ функция $u(r)$ достигает положительного максимума и $f(r_0) > 0$. Тогда $u'(r_0) = 0$ и $u''(r_0) \leq 0$. Из (17), учитывая равенство $g(r_0, u(r_0), 0) = 0$, получим

$$h(r_0, u(r_0)) + f(r_0) \geq 0.$$

Из (8) следует, что

$$|h(r_0, u(r_0))| \leq f(r_0) \leq f_0,$$

откуда в силу (7) немедленно вытекает существование такой постоянной M_1 , зависящей от f_0 и h , что

$$u(r_0) \leq M_1(f_0, h). \quad (18)$$

Если же $f(r_0) \leq 0$, то r_0 не может быть точкой положительного максимума функции u .

Перейдем к исследованию поведения u на границе. Если $r = 0$ является точкой положительного максимума функции u , то существует такая δ -окрестность точки $r = 0$, что для любого $r \in (0, \delta)$ имеем $u(r) > 0$, $u'(r) \leq 0$ и $u''(r) \leq 0$. Тогда из (17) для указанных значений r получим

$$h(r, u(r)) + g(r, u, u') + f(r) \geq 0,$$

или

$$f(r) + g(r, u, u') \geq |h(r, u(r))|.$$

Устремив $r \rightarrow 0$, учитывая краевые условия (6)–(8) и предполагая, что $f(0) > 0$, в пределе найдем

$$|h(0, u(0))| \leq f(0) \leq f_0,$$

и, как следствие,

$$u(0) \leq M_1(f_0, h). \quad (19)$$

Если $f(0) \leq 0$, то достижение функцией u положительного максимума в нуле невозможно.

Рассмотрим теперь поведение функции u в правой граничной точке. Если $r = R$ является точкой положительного максимума функции u , то существует такая δ -окрестность

точки $r = R$, что для любого $r \in (R - \delta, R)$ имеем $u(r) > 0$, $u'(r) \geq 0$ и $u''(r) \leq 0$. Из (17) получим

$$h(r, u(r)) + g(r, u, u') + f(r) + \frac{n-1}{r}(u'^\alpha(r) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'(r) \geq 0,$$

откуда следует неравенство

$$f(r) + g(r, u, u') + \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u' \geq |h(r, u(r))|.$$

Устремив $r \rightarrow R$, учитывая краевые условия, (6)–(8) и предполагая, что $f(R) > 0$, в пределе найдем

$$|h(R, u(R))| \leq f(R) \leq f_0,$$

и, как следствие,

$$u(R) \leq M_1(f_0, h). \quad (20)$$

Если $f(R) \leq 0$, то u не может достигать положительного максимума в $r = R$.

Получим теперь оценку функции u снизу. Пусть в точке $r = r_1 \in (0, R)$ функция u достигает отрицательного минимума и $f(r_1) < 0$. Тогда $u'(r_1) = 0$, $u''(r_1) \geq 0$, и из (17) следует

$$-f_0 \leq f(r_1) \leq -|h(r_1, u(r_1))|,$$

или, учитывая (6)–(8), существует такая постоянная $M_2(f_0, h)$, что

$$u(r_1) \geq -M_2(f_0, h). \quad (21)$$

Если $f(r_1) \geq 0$, то r_1 не может быть точкой отрицательного минимума функции u .

Перейдем к исследованию поведения u на границе. Пусть $r = 0$ является точкой отрицательного минимума функции u . Тогда существует такая окрестность $(0, \delta)$, что для любого r из этой окрестности $u(r) < 0$, $u' \geq 0$ и $u'' \geq 0$. Из (17) получим

$$h(r, u(r)) + g(r, u, u_r) + f(r) \leq 0.$$

Устремив $r \rightarrow 0$, учитывая краевые условия, (6)–(8) и предполагая, что $f(0) < 0$, в пределе получим

$$-f_0 \leq f(0) \leq -|h(0, u(0))|,$$

и, следовательно,

$$u(0) \geq -M_2(f_0, h). \quad (22)$$

Если $f(0) \geq 0$, то нуль не может быть точкой отрицательного минимума функции u .

Пусть теперь точка $r = R$ является точкой отрицательного минимума функции u . Тогда существует такая окрестность $(R - \delta, R)$, что для любого r из этой окрестности $u(r) < 0$, $u' \leq 0$ и $u'' \geq 0$. Из (17) следует, что

$$h(r, u(r)) + g(r, u, u') + f(r) + \frac{n-1}{r}(u'^\alpha(r) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'(r) \leq 0,$$

отсюда

$$f(r) + g(r, u, u') + \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u' \leq -|h(r, u(r))|.$$

Устремив $r \rightarrow R$, учитывая краевые условия, (6)–(8) и предполагая, что $f(R) < 0$, в пределе найдем

$$-f_0 \leq f(R) \leq -|h(r, u(r))|,$$

и, как следствие,

$$u(R) \geq -M_2(f_0, h). \quad (23)$$

Если $f(R) \geq 0$, то функция u не может достигать отрицательного минимума в $r = R$.

Таким образом, из (18)–(23) вытекает, что решение задачи (17), (5) удовлетворяет неравенству

$$|u(r)| \leq M(f_0, h) \quad \forall r \in (0, R), \quad M = \max\{M_1, M_2\}.$$

□

2. Априорная оценка максимума модуля производной регуляризованной задачи

Получим теперь априорную оценку максимума модуля производной классического решения регуляризованной задачи. Введем функцию

$$\Phi(\tau) = -C_1 \frac{\tau^2}{2} + C_2 \tau,$$

где $\tau \in [0, R]$, C_1 и C_2 из (9).

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1 и (10)–(12). Тогда для любого классического решения задачи (17), (5) справедлива оценка

$$|u'(r)| \leq \Phi'(0) = C_2.$$

Доказательство. Используем метод введения дополнительной пространственной переменной. Запишем уравнение (17) в двух различных точках $r = x$ и $r = y$:

$$-a_\varepsilon(u'(x))u''(x) - \frac{n-1}{x}(u'^\alpha(x) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u'(x) = F(x, u(x), u'(x)), \quad (24)$$

$$-a_\varepsilon(u'(y))u''(y) - \frac{n-1}{y}(u'^\alpha(y) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u'(y) = F(y, u(y), u'(y)). \quad (25)$$

Вычитая (25) из (24), получим

$$\begin{aligned} & -a_\varepsilon(u'(x))u''(y) + a_\varepsilon(u'(y))u''(x) - \frac{n-1}{x}(u'^\alpha(x) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u'(x) + \frac{n-1}{y}(u'^\alpha(y) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u'(y) = \\ & = F(x, u(x), u'(x)) - F(y, u(y), u'(y)). \end{aligned} \quad (26)$$

Рассмотрим функцию $V(x, y) = u(x) - u(y)$. Очевидно, $V_{xx} = u_{xx}$, $V_{yy} = -u_{yy}$. Учитывая эти равенства, перепишем (26) следующим образом:

$$\begin{aligned} & -a_\varepsilon(u_x)V_{xx} - a_\varepsilon(u_y)V_{yy} = \\ & = \frac{n-1}{x}(u_x^\alpha(x) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_x(x) - \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha(y) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_y(y) + F(x, u(x), u'(x)) - F(y, u(y), u'(y)). \end{aligned}$$

Рассмотрим линейный оператор

$$\tilde{L}z(x, y) = -a_\varepsilon(u_x)z_{xx} - a_\varepsilon(u_y)z_{yy}.$$

Функция $\Phi(x - y)$ удовлетворяет равенству

$$\tilde{L}\Phi = -a_\varepsilon(u_x)\Phi_{xx} - a_\varepsilon(u_y)\Phi_{yy} = (a_\varepsilon(u_x) + a_\varepsilon(u_y))C_1.$$

Для функции $W(x, y) = V(x, y) - \Phi(x - y)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{L}W &= -a_\varepsilon(u_x)W_{xx} - a_\varepsilon(u_y)W_{yy} = \tilde{L}V - \tilde{L}\Phi = \\ &= \frac{n-1}{x}(u_x^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_x - \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_y + F(x, u(x), u'(x)) - F(y, u(y), u'(y)) - \\ &\quad - (a_\varepsilon(u_x) + a_\varepsilon(u_y))C_1. \end{aligned} \quad (27)$$

Положим

$$P = \{(x, y) : x \in (0, R), y \in (0, R), x > y\}.$$

Пусть $Q_0 = (x_0, y_0)$ является точкой положительного максимума функции $W(x, y)$. Тогда в этой точке

$$W_x = W_y = 0, \quad W_{xx} \leq 0, \quad W_{yy} \leq 0, \quad u_x = u_y = \Phi', \quad \tilde{L}W \geq 0. \quad (28)$$

С другой стороны, из (6), (27) и (28) следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{L}W \Big|_{Q_0} &\leq \left[\frac{n-1}{x} - \frac{n-1}{y} \right] ((\Phi')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} \Phi' \Big|_{Q_0} + \\ &+ g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) + (F_+ - F_-) - 2a_\varepsilon(\Phi'(x_0 - y_0))C_1 < \\ &< g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) + (F_+ - F_-) - 2a_\varepsilon(\Phi'(x_0 - y_0))C_1, \end{aligned} \quad (29)$$

так как

$$\left[\frac{n-1}{x} - \frac{n-1}{y} \right] ((\Phi')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} \Phi' \Big|_{Q_0} < 0.$$

Нетрудно показать прямым дифференцированием, что функция

$$a_\varepsilon(\Phi') = ((\Phi')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}-1}((p-1)(\Phi')^\alpha + \varepsilon)$$

является возрастающей по параметру ε при $p > 2$. Значит,

$$a_\varepsilon(\Phi') = ((\Phi')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}-1}((p-1)(\Phi')^\alpha + \varepsilon) \geq (p-1)(\Phi')^{p-2}. \quad (30)$$

Из $\Phi' \geq C_2 - C_1R$ следует неравенство $(\Phi')^{p-2} \geq (C_2 - C_1R)^{p-2}$. Значит, из (30) имеем

$$a_\varepsilon(\Phi')C_1 \geq (p-1)(C_2 - C_1R)^{p-2}C_1. \quad (31)$$

Из (9) и (29) вытекает, что

$$\tilde{L}W \Big|_{Q_0} < g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)).$$

Чтобы получить противоречие с неравенством $\tilde{L}W \geq 0$, имеющим место в точке Q_0 , покажем, что

$$g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) \leq 0. \quad (32)$$

Представим (32) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) = \\ & = [g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0))] + \\ & + [g(y_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0))]. \end{aligned} \quad (33)$$

Используя условия (10) и (11), из (33) получим

$$\begin{aligned} & g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) \leq \\ & \leq \left[K\left(x_0, y_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)\right)(x_0 - y_0) - \right. \\ & \left. - \gamma\left(x_0, u(x_0), u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)\right)(u(x_0) - u(y_0)) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

В точке максимума

$$\begin{aligned} u(x_0) - u(y_0) & > \Phi(x_0 - y_0) = \Phi(x_0 - y_0) - \Phi(0) = \\ & = \Phi'\left(\frac{x_0 - y_0}{2}\right)(x_0 - y_0). \end{aligned} \quad (35)$$

Для упрощения записи положим

$$\begin{aligned} K(x_0, y_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) & = K(\cdot, \Phi'(x_0 - y_0)), \\ \gamma(x_0, u(x_0), u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) & = \gamma(\cdot, \Phi'(x_0 - y_0)). \end{aligned}$$

Используя (12), (35) и равенство $\Phi'(\tau) = -C_1\tau + C_2$, неравенство (34) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) \leq \\ & \leq \left[K(\cdot, \Phi'(x_0 - y_0)) - \gamma(\cdot, \Phi'(x_0 - y_0))\Phi'\left(\frac{x_0 - y_0}{2}\right) \right](x_0 - y_0) = \\ & = \left[K(\cdot, C_2 - C_1(x_0 - y_0)) - \gamma(\cdot, C_2 - C_1(x_0 - y_0))\left(C_2 - \frac{C_1}{2}(x_0 - y_0)\right) \right](x_0 - y_0) \leq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, $\tilde{L}W|_{Q_0} < 0$ и, как следствие, W не может достигать положительного максимума внутри P .

Исследуем поведение функции W на ∂P . При $x = R$ и $y \in [0, R]$ имеем

$$W_x(x, y)|_{x=R} = u_x(R) - \Phi_x(R - y) = -\Phi_x(R - y) \leq C_1R - C_2 < 0.$$

Следовательно, на этой части границы W не достигает положительного максимума. При $x = y$ имеем

$$W(x, y)|_{x=y} = u(x) - u(y) - \Phi(x - y)|_{x=y} = -\Phi(0) = 0.$$

При $y = 0$ и $x \in [0, R]$ имеем

$$W_y(x, y) \Big|_{y=0} = -u_y(0) + \Phi'(x) = \Phi'(x) \geq C_2 - C_1 R > 0.$$

Таким образом, функция W не достигает положительного максимума на этой части границы. Итак, мы заключаем, что $W(x, y) \leq 0$, откуда следует

$$u(x) - u(y) \leq \Phi(x - y). \quad (37)$$

Оценим разность $u(x) - u(y)$ снизу. Рассмотрим функцию $\widetilde{W} = \widetilde{V}(x, y) - \Phi(x - y) = u(y) - u(x) - \Phi(x - y)$. Вычитая (24) из (25), найдем

$$\begin{aligned} -a_\varepsilon(u_y)u_{yy} + a_\varepsilon(u_x)u_{xx} &= \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_y - \frac{n-1}{x}(u_x^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_x + \\ &+ F(y, u(y), u'(y)) - F(x, u(x), u'(x)), \end{aligned}$$

и с учетом соотношений $\widetilde{V}_{xx} = -u_{xx}$ и $\widetilde{V}_{yy} = u_{yy}$ придем к равенству

$$\begin{aligned} -a_\varepsilon(y)\widetilde{V}_{yy} - a_\varepsilon(x)\widetilde{V}_{xx} &= \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_y - \frac{n-1}{x}(u_x^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_x + \\ &+ F(y, u(y), u'(y)) - F(x, u(x), u'(x)). \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство

$$\begin{aligned} \widetilde{L}\widetilde{W} &= \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_y - \frac{n-1}{x}(u_x^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_x + \\ &+ F(y, u(y), u'(y)) - F(x, u(x), u'(x)) - (a_\varepsilon(u_x) + a_\varepsilon(u_y))C_1. \end{aligned} \quad (38)$$

Предположим, что в некоторой точке $Q_1 = (x_1, y_1) \in P$ функция $\widetilde{W}(x, y)$ достигает положительного максимума. Следовательно, в точке Q_1 выполнены соотношения

$$\widetilde{W}_x = \widetilde{W}_y = 0, \quad \widetilde{W}_{xx} \leq 0, \quad \widetilde{W}_{yy} \leq 0, \quad u_x = u_y = -\Phi', \quad \widetilde{L}\widetilde{W} \geq 0. \quad (39)$$

С другой стороны, из (10)–(12), (31), (38), (39), четности функции a_ε , используя рассуждения о функции g , приведенные выше, получим

$$\begin{aligned} \widetilde{L}\widetilde{W} \Big|_{Q_1} &\leq \left[\frac{n-1}{x} - \frac{n-1}{y} \right] (\Phi'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} \Phi' + F_+ - F_- - 2(p-1)(C_2 - C_1 R)^{p-2} C_1 + \\ &+ g(y, u(y), -\Phi'(x_0 - y_0)) - g(x, u(x), -\Phi'(x_0 - y_0)) \Big|_{Q_1} < 0, \end{aligned}$$

что противоречит предположению о том, что $\widetilde{W}$ достигает положительного максимума внутри P .

Исследуем поведение $\widetilde{W}$ на ∂P . При $x = R$ и $y \in [0, R]$ имеем

$$\widetilde{W}_x(x, y) \Big|_{x=R} = -u_x(R) - \Phi_x(R - y) = -\Phi_x(R - y) \leq C_1 R - C_2 < 0,$$

следовательно, $W(x, y)$ не достигает положительного максимума на указанном участке границы. При $x = y$ имеем

$$\widetilde{W}(x, y) \Big|_{x=y} = u(y) - u(x) - \Phi(x - y) \Big|_{x=y} = -\Phi(0) = 0.$$

Перейдем теперь к части границы, на которой $y = 0$, $x \in [0, R]$. Получим

$$\widetilde{W}_y(x, y) \Big|_{y=0} = u_y(0) + \Phi'(x) = \Phi'(x) \geq C_2 - C_1 R > 0.$$

Таким образом, функция $\widetilde{W}$ на этой части границы также не может достигать положительного максимума. Просуммировав полученные результаты, получим $\widetilde{W}(x, y) \leq 0$, значит,

$$u(y) - u(x) \leq \Phi(x - y). \quad (40)$$

Из (37) и (40) следует, что $|u(x) - u(y)| \leq \Phi(x - y)$. В силу симметрии переменных x и y можно аналогичным образом рассмотреть случай $x < y$, чтобы получить оценку $|u(x) - u(y)| \leq \Phi(y - x)$. Следовательно,

$$|u(x) - u(y)| \leq \Phi(|x - y|).$$

Заметив, что $\Phi(0) = 0$, перепишем последнее неравенство в виде

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} \leq \frac{\Phi(|x - y|) - \Phi(0)}{|x - y|},$$

откуда сразу следует требуемая оценка градиента

$$|u_x| \leq \Phi'(0) = C_2.$$

□

3. Доказательство теорем существования

Рассмотрим решение u_ε регуляризованного уравнения (4)

$$-((u'_\varepsilon + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon)' - \frac{n-1}{r} (u'_\varepsilon + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon = F(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon), \quad (41)$$

$$u'_\varepsilon(0) = 0, \quad u'_\varepsilon(R) = 0. \quad (42)$$

Наличие неограниченного при $r \rightarrow 0$ коэффициента $\frac{n-1}{r}$ требует исследования поведения выражения $\frac{n-1}{r} (u'_\varepsilon + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon$. Для доказательства существования классического решения задачи (41), (42) нужно показать ограниченность этого выражения при $r \rightarrow 0$ [22]. Положим $Z(r) = (u'_\varepsilon + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon$.

Лемма 3. Если u_ε является классическим решением задачи (41), (42), то $Z(r) \in C^1[0, R]$ и

$$Z'(0) = -\frac{F(0, u_\varepsilon(0), 0)}{n}.$$

Доказательство. Перепишем (41) в следующем виде:

$$Z' + \frac{n-1}{r}Z + F(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon) = 0. \quad (43)$$

Представим теперь уравнение (43) в форме

$$(r^{n-1}Z)' + r^{n-1}F(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon) = 0. \quad (44)$$

Из (44) немедленно вытекает, что

$$\frac{Z(r)}{r} = -\frac{1}{r^n} \int_0^r t^{n-1} F(t, u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) dt. \quad (45)$$

Из (43) и (45) следует

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} Z' &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Z(r) - Z(0)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Z(r)}{r} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} ((u'_\varepsilon)^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon = -\frac{F(0, u_\varepsilon(0), 0)}{n} \end{aligned} \quad (46)$$

для любого $\varepsilon > 0$, причем (46) является следствием применения правила Лопиталья к правой части (45). $\square$

Заметим, что из леммы 3 вытекает ограниченность Z_r в $[0, R]$ для любого $\varepsilon \geq 0$ и, как следствие, гёльдеровость u'_ε

$$|u'_\varepsilon(r_1) - u'_\varepsilon(r_2)| \leq c_1 |r_1 - r_2|^{\frac{1}{p-1}}, \quad (47)$$

где постоянные c_1 и c_2 не зависят от ε . Имея априорные оценки классического решения в классе $\mathbb{C}^{1, \frac{1}{p-1}}$, можно применить принцип неподвижной точки [19, 23] для доказательства существования решения задачи (41) и (42). Применение теоремы Лерэ–Шаудера требует наличия априорных оценок в семействе уравнений с параметром, где параметр входит в уравнение как множитель при младших членах, т. е. семейство имеет вид

$$-a_\varepsilon(u')u'' = \sigma \left(\frac{n-1}{r} (u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u' + F(r, u, u') \right),$$

где $\sigma \in [0, 1]$ (см. [23], гл. 11, теорема 11.3). Учитывая специфику вхождения параметра и его пределы изменения, выполнение всех оценок и условий легко можно проверить. Ниже приведены итоговые формулировки.

Теорема 2. Пусть $F(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon)$ непрерывна по совокупности своих переменных и выполнены условия (7), (8). Пусть $g(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (10)–(12). Тогда существует классическое решение $u_\varepsilon \in \mathbb{C}^2(0, R) \cap \mathbb{C}^{1, \frac{1}{p-1}}[0, R]$ задачи (41) и (42), удовлетворяющее следующим соотношениям:

$$|u_\varepsilon| \leq M(f_0, h), \quad |u'_\varepsilon| \leq C_2 = \Phi'(0).$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим уравнение (41). Домножив (41) на $\phi \in C_0^\infty(0, R)$ и проинтегрировав по частям, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^R ((u'_\varepsilon)^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon \phi' dr - \int_0^R \frac{n-1}{r} ((u'_\varepsilon)^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon \phi dr = \\ & = \int_0^R (h(r, u_\varepsilon) + g(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon) + f(r)) \phi(r) dr. \end{aligned} \quad (48)$$

Из (47) сделаем заключение о существовании такой подпоследовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$, что

$$u_{\varepsilon_n}(r) \rightarrow u(r), \quad u'_{\varepsilon_n}(r) \rightarrow u'(r) \quad \text{в } C[0, R], \quad (49)$$

откуда в силу непрерывности функций h и g по совокупности своих переменных сразу следует

$$h(r, u_{\varepsilon_n}) \rightarrow h(r, u), \quad g(r, u_{\varepsilon_n}, u'_{\varepsilon_n}) \rightarrow g(r, u, u') \quad \text{в } C[0, R].$$

Также из (49) получим

$$\begin{aligned} & (u'_{\varepsilon_n})^\alpha + \varepsilon_n \rightarrow (u')^\alpha \quad \text{в } C[0, R], \\ & ((u'_{\varepsilon_n})^\alpha + \varepsilon_n)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_{\varepsilon_n} \rightarrow |u'|^{p-2} u' \quad \text{в } C[0, R]. \end{aligned} \quad (50)$$

Из (50) и того факта, что функция $\frac{\phi(r)}{r}$ непрерывна на $[0, R]$, вытекает

$$\int_0^R \frac{n-1}{r} ((u'_{\varepsilon_n})^\alpha + \varepsilon_n)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_{\varepsilon_n} \phi dr \rightarrow \int_0^R \frac{n-1}{r} |u'|^{p-2} u' \phi dr.$$

Переходя к пределу в (48) при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$ является искомым слабым радиально-симметричным решением задачи (4) и (5). $\square$

Заключение

Рассмотрена задача Неймана для уравнения с p -лапласианом и младшим членом, не удовлетворяющим условию Бернштейна–Нагумо. Исследована разрешимость указанной задачи в классе слабых соболевских радиально-симметричных решений. Определен класс градиентных нелинейностей, для которого доказано существование слабого соболевского радиально-симметричного решения с производной, непрерывной по Гёльдеру с показателем $\frac{1}{p-1}$. Новизна результатов заключается в доказательстве существования решения при нарушении условия Бернштейна–Нагумо без каких-либо условий малости на входные данные краевой задачи. Теорема существования доказана при произвольном росте младших членов по градиенту, в частности, и при экспоненциальном. Для получения решения исходной задачи применена аппроксимационная техника. Доказательство основного результата базируется на доказательстве классической разрешимости регуляризованной задачи и предельного перехода по параметру регуляризации. Полученные априорные оценки решения регуляризованной задачи не зависят от параметра регуляризации, что позволяет осуществить предельный переход и получение решения исходной задачи указанной гладкости.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Dall’Aglia A., Giachetti D., Segura de León S.* Global existence for parabolic problems involving the p -Laplacian and a critical gradient term // *Indiana Univ. Math. J.* 2009. V. 58, No 1. P. 1–48. <https://dx.doi.org/10.1512/iumj.2009.58.3409>.
2. *Dall’Aglia A., De Cicco V., Giachetti D., Puel J.-P.* Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic equations in unbounded domains // *Nonlinear Differ. Equations Appl.* 2004. V. 11, No 4. P. 431–450. <https://dx.doi.org/10.1007/s00030-004-1070-0>.
3. *Nakao M., Chen C.* Global existence and gradient estimates for the quasilinear parabolic equations of m -Laplacian type with a nonlinear convection term // *J. Differ. Equations.* 2000. V. 162, No 1. P. 224–250. <https://dx.doi.org/10.1006/jdeq.1999.3694>.
4. *Sbai A., El Hadfi Y., Zeng S.* Nonlinear singular elliptic equations of p -Laplace type with superlinear growth in the gradient // *Mediterr. J. Math.* 2023. V. 20, No 1. Art. 32. <https://doi.org/10.1007/s00009-022-02244-7>.
5. *Bueno H., Ercole G., Ferreira W.M., Zumpano A.* Positive solutions for the p -Laplacian with dependence on the gradient // *Nonlinearity.* 2010. V. 25, No 4. P. 1211–1234. <https://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/25/4/1211>.
6. *Figueiredo D.G., Sánchez J., Ubilla P.* Quasilinear equations with dependence on the gradient // *Nonlinear Anal.: Theory, Methods Appl.* 2009. V. 71, No 10. P. 4862–4868. <https://dx.doi.org/10.1016/j.na.2009.03.061>.
7. *Iturriaga L., Lorca S., Sánchez J.* Existence and multiplicity results for the p -Laplacian with a p -gradient term // *Nonlinear Differ. Equations Appl.* 2008. V. 15, No 6. P. 729–743. <https://doi.org/10.1007/s00030-008-0064-8>.
8. *Li J., Yin J., Ke Y.* Existence of positive solutions for the p -Laplacian with p -gradient term // *J. Math. Anal. Appl.* 2011. V. 383, No 1. P. 147–158. <https://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.05.008>.
9. *Ruiz D.* A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems // *J. Differ. Equations.* 2004. V. 199, No 1. P. 96–114. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.10.021>.
10. *Zou H.H.* A priori estimates and existence for quasilinear elliptic equations // *Calculus Var. Partial Differ. Equations.* 2008. V. 33. P. 417–437. <https://doi.org/10.1007/s00526-008-0168-3>.
11. *Gupta S., Dwivedi G.* An existence result for p -Laplace equation with gradient nonlinearity in $\mathbb{R}^N$ // *Commun. Math.* 2022. V. 30, No 1. P. 149–159. <https://doi.org/10.46298/cm.9316>.
12. *Leonori T., Porretta A., Riey G.* Comparison principles for p -Laplace equations with lower order terms // *Ann. Mat. Pura Appl.* 2017. V. 196, No 3. P. 877–903. <https://doi.org/10.1007/s10231-016-0600-9>.
13. *Razani A.* Game-theoretic p -Laplace operator involving the gradient // *Miskolc Math. Notes.* 2022. V. 23, No 2. P. 867–879. <https://doi.org/10.18514/MMN.2022.3467>.
14. *Precup R., Gheorghiu C.-I.* Theory and computation of radial solutions for Neumann problems with ϕ -Laplacian // *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2024. V. 23, No 3. Art. 107. <https://doi.org/10.1007/s12346-024-00963-8>.

15. *Pei M., Wang L., Lv X.* Radial solutions for p -Laplacian Neumann problems involving gradient term without growth restrictions // *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 2021. V. 44, No 4. P. 2035–2047. <https://doi.org/10.1007/s40840-020-01047-x>.
16. *Pei M., Wang L., Lv X.* Radial solutions for p -Laplacian Neumann problems with gradient dependence // *Math. Nachr.* 2022. V. 295, No 12. P. 2422–2435. <https://doi.org/10.1002/mana.202000107>.
17. *Cianciaruso F., Infante G., Pietramala P.* Multiple positive radial solutions for Neumann elliptic systems with gradient dependence // *Math. Methods Appl. Sci.* 2018. V. 41, No 16. P. 6358–6367. <https://doi.org/10.1002/mma.5143>.
18. *Bueno H., Ercole G.* A quasilinear problem with fast growing gradient // *Appl. Math. Lett.* 2013. V. 26, No 4. P. 520–523. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.12.009>.
19. *Tersenov Ar.S.* Influence of gradient terms on the existence of solutions to the Dirichlet problem for p -Laplacian // *J. Math. Sci.* 2018. V. 228, No 4. P. 463–474. <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3635-6>.
20. *Tersenov Ar.S.* Radially symmetric solutions of the p -Laplace equation with gradient terms // *J. Appl. Ind. Math.* 2018. V. 12, No 4. P. 770–784. <https://doi.org/10.1134/S1990478918040178>.
21. *Tersenov Ar.S.* On the existence of radially symmetric solutions for the p -Laplace equation with strong gradient nonlinearities // *Sib. Math. J.* 2023. V. 64, No 6. P. 1443–1454. <https://doi.org/10.1134/S0037446623060162>.
22. *Franchi B., Lanconelli E., Serrin J.* Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in R^n // *Adv. Math.* 1996. V. 118, No 2. P. 177–243. <https://doi.org/10.1006/aima.1996.0021>.
23. *Gilbarg D., Trudinger N.S.* Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Ser.: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. V. 224. Berlin, New York, NY: Springer, 1983. xiii, 513 p.

References

1. *Dall'Aglio A., Giachetti D., Segura de León S.* Global existence for parabolic problems involving the p -Laplacian and a critical gradient term. *Indiana Univ. Math. J.*, 2009, vol. 58, no. 1, pp. 1–48. <https://dx.doi.org/10.1512/iumj.2009.58.3409>.
2. *Dall'Aglio A., De Cicco V., Giachetti D., Puel J.-P.* Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic equations in unbounded domains. *Nonlinear Differ. Equations Appl.*, 2004, vol. 11, no. 4, pp. 431–450. <http://dx.doi.org/10.1007/s00030-004-1070-0>.
3. *Nakao M., Chen C.* Global existence and gradient estimates for the quasilinear parabolic equations of m -Laplacian type with a nonlinear convection term. *J. Differ. Equations*, 2000, vol. 162, no. 1, pp. 224–250. <http://dx.doi.org/10.1006/jdeq.1999.3694>.
4. *Sbai A., El Hadfi Y., Zeng S.* Nonlinear singular elliptic equations of p -Laplace type with superlinear growth in the gradient. *Mediterr. J. Math.*, 2023, vol. 20, no. 1, art. 32. <https://doi.org/10.1007/s00009-022-02244-7>.
5. *Bueno H., Ercole G., Ferreira W.M., Zumpano A.* Positive solutions for the p -Laplacian with dependence on the gradient. *Nonlinearity*, 2010, vol. 25, no. 4, pp. 1211–1234. <http://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/25/4/1211>

6. De Figueiredo D.G, Sánchez J., Ubilla P. Quasilinear equations with dependence on the gradient. *Nonlinear Anal.: Theory, Methods Appl.*, 2009, vol. 71, no. 10, pp. 4862–4868. <http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2009.03.061>.
7. Iturriaga L., Lorca S., Sánchez J. Existence and multiplicity results for the p -Laplacian with a p -gradient term. *Nonlinear Differ. Equations Appl.*, 2008, vol. 15, no. 6, pp. 729–743. <https://doi.org/10.1007/s00030-008-0064-8>.
8. Li J., Yin J., Ke Y. Existence of positive solutions for the p -Laplacian with p -gradient term. *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, vol. 383, no. 1, pp. 147–158. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.05.008>.
9. Ruiz D. A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems. *J. Differ. Equations*, 2004, vol. 199, no. 1, pp. 96–114. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.10.021>.
10. Zou H.H. A priori estimates and existence for quasilinear elliptic equations. *Calculus Var. Partial Differ. Equations*, 2008, vol. 33, no. 4, pp. 417–437. <https://doi.org/10.1007/s00526-008-0168-3>.
11. Gupta S., Dwivedi G. An existence result for p -Laplace equation with gradient nonlinearity in $\mathbb{R}^N$. *Commun. Math.*, 2022, vol. 30, no. 1, pp. 149–159. <https://doi.org/10.46298/cm.9316>.
12. Leonori T., Porretta A., Riey G. Comparison principles for p -Laplace equations with lower order terms. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 2017, vol. 196, no. 3, pp. 877–903. <https://doi.org/10.1007/s10231-016-0600-9>.
13. Razani A. Game-theoretic p -Laplace operator involving the gradient. *Miskolc Math. Notes*, 2022, vol. 23, no. 2, pp. 867–879. <https://doi.org/10.18514/MMN.2022.3467>.
14. Precup R., Gheorghiu C.-I. Theory and computation of radial solutions for Neumann problems with ϕ -Laplacian. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 2024, vol. 23, no. 3, art. 107. <https://doi.org/10.1007/s12346-024-00963-8>.
15. Pei M., Wang L., Lv X. Radial solutions for p -Laplacian Neumann problems involving gradient term without growth restrictions. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2021, vol. 44, no. 4, pp. 2035–2047. <https://doi.org/10.1007/s40840-020-01047-x>.
16. Pei M., Wang L., Lv X. Radial solutions for p -Laplacian Neumann problems with gradient dependence. *Math. Nachr.*, 2022, vol. 295, no. 12, pp. 2422–2435. <https://doi.org/10.1002/mana.202000107>.
17. Cianciaruso F., Infante G., Pietramala P. Multiple positive radial solutions for Neumann elliptic systems with gradient dependence. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2018, vol. 41, no. 16, pp. 6358–6367. <https://doi.org/10.1002/mma.5143>.
18. Bueno H., Ercole G. A quasilinear problem with fast growing gradient. *Appl. Math. Lett.*, 2013, vol. 26, no. 4, pp. 520–523. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.12.009>.
19. Tersenov Ar.S. Influence of gradient terms on the existence of solutions to the Dirichlet problem for p -Laplacian. *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 228, no. 4, pp. 463–474. <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3635-6>.
20. Tersenov Ar.S. Radially symmetric solutions of the p -Laplace equation with gradient terms. *J. Appl. Ind. Math.*, 2018, vol. 12, no. 4, pp. 770–784. <https://doi.org/10.1134/S1990478918040178>.

21. Tersenov Ar.S. On the existence of radially symmetric solutions for the p -Laplace equation with strong gradient nonlinearities. *Sib. Math. J.*, 2023, vol. 64, no. 6, pp. 1443–1454.
<https://doi.org/10.1134/S0037446623060162>.
22. Franchi B., Lanconelli E., Serrin J. Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in R^n . *Adv. Math.*, 1996, vol. 118, no. 2, pp. 177–243.
<https://doi.org/10.1006/aima.1996.0021>.
23. Gilbarg D., Trudinger N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Ser.: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Vol. 224. Berlin, New York, NY, Springer, 1983. xiii, 513 p.

Информация об авторах

Арис Саввич Терсенов, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

E-mail: aterseno@math.nsc.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-2748-8020>

Расул Чориёр угли Сафаров, аспирант, Новосибирский научно-исследовательский государственный университет; Каршинский государственный университет

E-mail: r.safarov1@g.nsu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6247-1373>

Author Information

Aris S. Tersenov, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences

E-mail: aterseno@math.nsc.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-2748-8020>

Rasul C. Safarov, Postgraduate Student, Novosibirsk State University; Karshi State University

E-mail: r.safarov1@g.nsu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6247-1373>

Поступила в редакцию 3.02.2025
Принята к публикации 24.02.2025

Received February 3, 2025
Accepted February 24, 2025