ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ
УДК 514.763
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.140-149

Инвариантная почти контактная структура на вещественном расширении сферы

М.В. Сорокина ✉**, Ю.Д. Морщинкина**

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

✉ *sorokina_m@list.ru*

Аннотация

Исследован вопрос о существовании инвариантных относительно группы движений контактных и почти контактных метрических структур на вещественном расширении двумерной сферы с римановой метрикой прямого произведения. Найдены базисные векторные поля алгебры Ли группы Ли движений. Доказано, что не существует инвариантных контактных структур, но существует почти контактная метрическая структура, которая является интегрируемой нормальной с замкнутой фундаментальной формой и, следовательно, квазисасакиевой. Группа Ли автоморфизмов этой структуры совпадает с группой движений и имеет максимальную размерность. Найдены все линейные связности, инвариантные относительно группы автоморфизмов, в которых структурные тензоры квазисасакиевой структуры ковариантно постоянны. Каждая такая связность однозначно определяется квазисасакиевой структурой и фиксированием одной постоянной. Установлено, что контактное распределение почти контактной структуры является вполне геодезическим, следовательно, найденные связности согласованы с данным распределением.

Ключевые слова: вещественное расширение сферы, почти контактная структура, инфинитезимальный автоморфизм, почти контактная метрическая связность

Для цитирования: *Сорокина М.В., Морщинкина Ю.Д.* Инвариантная почти контактная структура на вещественном расширении сферы // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 140–149. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.140-149.

ORIGINAL ARTICLE
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.140-149

Invariant almost contact structure on the real extension of a sphere

M.V. Sorokina ✉, Y.D. Morshchinkina

Penza State University, Penza, Russia

✉ *sorokina_m@list.ru*

Abstract

The existence of contact and almost contact metric structures invariant under the group of motions on the real extension of a two-dimensional sphere with a Riemannian direct product metric was examined. The basis vector fields of the Lie algebra associated with the Lie group of motions were found. The results obtained show that invariant contact structures do not exist, but there is an almost contact metric structure, which is integrable, normal, and has a closed fundamental form, thus making it quasi-Sasakian. The Lie group of automorphisms of this structure coincides with the group of motions and has the maximum possible dimension. All linear connections were found that are invariant under the automorphism group and in which the structural tensors of the quasi-Sasakian structure are covariantly constant. Each such connection is uniquely determined by the quasi-Sasakian structure and by fixing one constant. It was established that the contact distribution of the almost contact structure is completely geodesic. Therefore, the derived connections are consistent with this distribution.

Keywords: real extension of sphere, almost contact structure, infinitesimal automorphism, almost contact metric connection

For citation: Sorokina M.V., Morshchinkina Y.D. Invariant almost contact structure on the real extension of a sphere. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 140–149. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.140-149. (In Russian)

Введение

В настоящее время не ослабевает интерес к исследованию контактных и почти контактных метрических структур, заданных на нечетномерных многообразиях [1–6], в частности, на трехмерных многообразиях [7]. Если многообразие является группой Ли, то естественно рассматривать левоинвариантные структуры. Если многообразие не является группой Ли, то также естественно исследовать метрические структуры, инвариантные относительно группы движений (изометрий). Среди восьми трехмерных геометрий Терстона [8,9] имеется геометрия вещественного расширения сферы $S^2 \times \mathbb{R}$ с римановой метрикой прямого произведения. Это многообразие является односвязным и допускает группу Ли движений максимальной размерности. Установлено, что на многообразии $S^2 \times \mathbb{R}$ не существует контактной структуры, инвариантной относительно группы движений, но существует почти контактная метрическая структура, которая является интегрируемой нормальной структурой с замкнутой фундаментальной формой и, следовательно, квазисасакиевой. Найдены все инвариантные связности с кручением, в которых структурные тензоры квазисасакиевой структуры ковариантно постоянны.

1. Почти контактная метрическая структура

Пусть M – гладкое многообразие нечетной размерности $m = 2n+1$. Почти контактной структурой на M называется тройка тензорных полей (η, ξ, φ), где η – дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой, ξ – векторное поле Риба, φ – структурный эндоморфизм модуля гладких векторных полей на M. При этом требуется выполнение следующих условий:

$$1)\, \eta(\xi) = 1, \quad 2)\, \varphi(\xi) = 0, \quad 3)\, \eta \circ \varphi = 0, \quad 4)\, \varphi^2 = -id + \eta \otimes \xi.$$

Если на M зафиксирована такая риманова метрика, что

$$5)\, g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

то четверка (η, ξ, φ, g) определяет на M почти контактную метрическую структуру. Дифференциальная 2-форма ω, определенная равенством

$$\omega(X, Y) = g(\varphi X, Y),$$

называется фундаментальной формой почти контактной метрической структуры. Почти контактная структура является нормальной, если выполняется следующее равенство:

$$[\varphi, \varphi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi = 0,$$

где

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

– кручение Нейенхейса. Нормальная почти контактная метрическая структура с замкнутой фундаментальной формой называется квазисасакиевой. Почти контактная структура называется интегрируемой, если кручение Нейенхейса эндоморфизма φ равно нулю.

Если $\omega = d\eta$, то $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$, и почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой [10, 11].

2. Алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов

Пусть S^2 – единичная сфера трехмерного евклидова пространства E^3, а (x, y) – ее географические координаты. Евклидова метрика в E^3 индуцирует на S^2 следующую риманову метрику:

$$ds^2 = dx^2 + (\cos x)^2 dy^2.$$

Если z – координата на вещественной прямой $\mathbb{R}$, то риманова метрика прямого произведения на $S^2 \times \mathbb{R}$ примет следующий вид:

$$ds^2 = dx^2 + (\cos x)^2 dy^2 + dz^2. \tag{1}$$

Заметим, что трехмерное многообразие $S^2\times\mathbb{R}$ можно вложить в четырехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ в виде цилиндрической поверхности. Уравнение этой поверхности в прямоугольных декартовых координатах (u^1,u^2,u^3,u^4) имеет вид

$$u^1=\cos x\cos y,\quad u^2=\cos x\sin y,\quad u^3=\sin x,\quad u^4=z.$$

Нетрудно теперь убедиться, что евклидова метрика в E^4 индуцирует на «сферическом цилиндре» метрику (1). Хорошо известно (см, например, [8]), что связное односвязное многообразие с римановой метрикой прямого произведения $S^2\times\mathbb{R}$ допускает четырехмерную группу Ли G движений (изометрий). Пусть $\varphi_t=\exp tX$ – однопараметрическая подгруппа группы G. Векторное поле X, порождающее эту подгруппу, является инфинитезимальным движением, если производная Ли вдоль X от метрического тензора g равна нулю: $L_xg=0$. В координатах имеем следующие уравнения Киллинга:

$$X^p\partial_pg_{ij}+\partial_iX^pg_{pj}+\partial_jX^pg_{ip}=0, \tag{2}$$

где X^p – координаты векторного поля X, g_{ij} – компоненты метрического тензора g; $X=X^p\partial_p$, $g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$, $\partial_p=\frac{\partial}{\partial x^p}$ – локальный базис гладких векторных полей, dx^i – дуальный ему кобазис дифференциальных 1-форм. Компоненты метрического тензора g для метрики (1) образуют следующую матрицу:

$$g_{ij}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&\cos^2x&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Уравнения (2) для метрического тензора (3) имеют следующий вид:

$$\partial_1X^1=0,\quad \partial_1X^2\cos^2x+\partial_2X^1=0,\quad \partial_1X^3+\partial_3X^1=0,$$

$$-X^1\sin x+\partial_2X^2\cos x=0,\quad \partial_2X^3+\partial_3X^2\ cos^2x=0,\quad \partial_3X^3=0,$$

где $\partial_1=\partial/\partial x$, $\partial_2=\partial/\partial y$, $\partial_3=\partial/\partial z$. Проинтегрировав эту систему, найдем ее общее решение

$$X^1=c_2\cos y+c_3\sin y,\quad X^2=c_2\operatorname{tg}x\sin y-c_3\operatorname{tg}x\cos y+c_1,\quad X^3=c_4.$$

Постоянным c_1,c_2,c_3,c_4 соответствуют следующие операторы группы Ли G – базисные векторные поля ее алгебры Ли:

$$X_1=\partial_2,\quad X_2=\cos y\partial_1+\operatorname{tg}x\sin y\partial_2,\quad X_3=\sin y\partial_1-\operatorname{tg}x\cos y\partial_2,\quad X_4=\partial_3. \tag{4}$$

Координаты этих полей определяют следующие структурные уравнения группы:

$$[X_1,X_2]=-X_3,\quad [X_1,X_3]=X_2,\quad [X_1,X_4]=0,$$

$$[X_2,X_3]=-X_1,\quad [X_2,X_4]=0,\quad [X_3,X_4]=0,$$

откуда следует, что группа движений является неразрешимой.

3. Инвариантная почти контактная структура

Векторное поле X является инфинитезимальным автоморфизмом почти контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g), если производная Ли от η, ξ, φ, g вдоль X равна нулю:

$$L_X\eta = 0, \quad L_X\xi = 0, \quad L_X\varphi = 0, \quad L_Xg = 0.$$

Из последнего равенства следует, что производная Ли от η, ξ, φ, g должна обращаться в нуль вдоль базисных векторных полей (4) алгебры Ли инфинитезимальных движений. В координатах имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$X^p_\alpha \partial_p \eta_i + \partial_i X^p_\alpha \eta_p = 0, \tag{5}$$

$$X^p_\alpha \partial_p \xi^i - \partial_p X^i_\alpha \xi^p = 0, \tag{6}$$

$$X^p_\alpha \partial_p \varphi^i_j + \partial_j X^p_\alpha \varphi^i_p - \partial_p X^i_\alpha \varphi^p_j = 0. \tag{7}$$

Так как $X_1 = \partial_2$ и $X_4 = \partial_3$, то $\eta_i, \xi^i, \varphi^i_j$ являются функциями одного аргумента x. Запишем систему (5) для векторного поля X_2:

$$\cos y \partial_1 \eta_1 + \frac{\sin y}{\cos^2 x}\eta_2 = 0,$$

$$\cos y \partial_1 \eta_2 - \sin y \eta_1 + \operatorname{tg} x \cos y \eta_2 = 0,$$

$$\cos y \partial_1 \eta_3 = 0.$$

Продифференцировав первое уравнение по y, получим

$$-\sin y \partial_1 \eta_1 + \frac{\cos y}{\cos^2 x}\eta_2 = 0.$$

Умножив это уравнение на $\cos y$, а первое уравнение на $\sin y$ и сложив их, получим $\eta_2 = 0$; из второго и третьего уравнений следует, что $\eta_1 = 0$, $\eta_3 = c_3 = const$. Таким образом, $\eta = c_3 dz$. Нетрудно проверить, что эта форма инвариантна относительно оператора X_3. Так как $d\eta = 0$, то заключаем, что на $S^2 \times \mathbb{R}$ не существует контактных метрических структур, инвариантных относительно группы движений.

Поскольку формы $c_3 dz$ и dz $(c_3 \neq 0)$ определяют одно и то же распределение, то в качестве «исходной» можно взять форму

$$\eta = dz. \tag{8}$$

Заметим, что распределение $H = ker\eta$ является интегрируемым и определяет естественное слоение $z = const$, слои которого суть сферы.

Из условия 1) $\eta(\xi) = 1$ следует соотношение

$$\xi = \frac{\partial}{\partial z}, \tag{9}$$

которое в силу (6) также инвариантно относительно группы движений.

Из условий 2) $\varphi^i_j \xi^j = 0$ и 3) $\varphi^i_j \eta_i = 0$ следует, что $\varphi^i_3 = 0$ и $\varphi^3_j = 0$. С учетом этих условий уравнения инвариантности (7) эндоморфизма φ относительно действия оператора X_2 представим в виде

$$\cos y \partial_1 \varphi^1_1 + \frac{\sin y}{\cos^2 x}\varphi^1_2 + \sin y \varphi^2_1 = 0,$$

$$\cos y\partial_1\varphi_2^1 - \sin y\varphi_1^1 + \operatorname{tg} x\cos y\varphi_2^1 + \sin y\varphi_2^2 = 0,$$
$$\cos y\partial_1\varphi_1^2 + \frac{\sin y}{\cos^2 x}\varphi_2^2 - \frac{\sin y}{\cos^2 x}\varphi_1^1 - \operatorname{tg} x\cos y\varphi_1^2 = 0,$$
$$\cos y\partial_1\varphi_2^2 - \sin y\varphi_1^2 - \frac{\sin y}{\cos^2 x}\varphi_2^1 = 0.$$

Как и в случае формы η, продифференцировав соответствующие уравнения и сложив соответствующие выражения, получим

$$\varphi_2^1 = -\cos^2 x\varphi_1^2, \quad \varphi_1^1 = \varphi_2^2 = const, \quad \partial_1\varphi_2^1 + \operatorname{tg} x\varphi_2^1 = 0, \quad \partial_1\varphi_1^2 - \operatorname{tg} x\varphi_1^2 = 0,$$

откуда следует, что $\varphi_2^1 = c_2^1\cos x$, $\varphi_1^2 = c^1/\cos x$ и $c_2^1 = -c_1^2$. Таким образом, матрица эндоморфизма φ примет вид

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} a & -b\cos x & 0 \\ \frac{b}{\cos x} & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где a, b – постоянные. Нетрудно убедиться, что полученный эндоморфизм инвариантен относительно оператора X_3.

Наложив на эндоморфизм φ условия 4) и 5) из определения почти контактной метрической структуры, получим

$$a^2 - b^2 = -1, \quad ab = 0, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

откуда следует, что $a = 0$, $b = \pm 1$, т. е. эндоморфизм φ определен с точностью до знака. Ограничение J эндоморфизма φ на распределение $H : z = const$ определяет комплексную структуру и при $x = 0$ должно иметь канонический вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому логично положить $b = 1$. Таким образом, имеем следующий вид структурного эндоморфизма, инвариантного относительно группы движений:

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} 0 & -\cos x & 0 \\ \frac{1}{\cos x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Условие нормальности почти контактной структуры в координатах имеет вид

$$\varphi_i^p\partial_p\varphi_j^k - \varphi_j^p\partial_p\varphi_i^k + \varphi_p^k\partial_j\varphi_i^p - \varphi_p^k\partial_i\varphi_j^p + (d\eta)_{ij} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что эти равенства для полученной структуры выполняются тождественно, а так как $d\eta = 0$, то и кручение Нейенхейса равно нулю. Компоненты $\Omega_{ij} = \varphi_i^p g_{pj}$ фундаментальной формы Ω образуют следующую матрицу:

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cos x & 0 \\ -\cos x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. $\omega = \cos x dx \wedge dy$, следовательно, Ω является замкнутой формой $d\Omega = 0$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *На вещественном расширении сферы существует почти контактная метрическая структура* (η, ξ, φ, g), *структурные тензоры которой определяются формулами* (8)–(10) *и* (1). *Эта структура является интегрируемой, нормальной, с замкнутой фундаментальной формой и, следовательно, квазисасакиевой. Группа автоморфизмов данной структуры совпадает с группой движений и имеет максимальную размерность.*

4. Инвариантные почти контактные метрические связности

Пусть (η, ξ, φ, g) – почти контактная метрическая структура на гладком многообразии M. Линейную связность $\widetilde{\nabla}$ на M назовем инвариантной, если она инвариантна относительно группы автоморфизмов почти контактной метрической структуры и структурные тензоры почти контактной метрической структуры ковариантно постоянны:

$$\widetilde{\nabla}\eta = 0, \quad \widetilde{\nabla}\xi = 0, \quad \widetilde{\nabla}\varphi = 0, \quad \widetilde{\nabla}g = 0. \tag{11}$$

Так как разность двух связностей является тензором, то коэффициенты $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ связности $\widetilde{\nabla}$ можно представить в виде суммы

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + T^k_{ij}, \tag{12}$$

где Γ^k_{ij} – коэффициенты связности Леви-Чивиты ∇, а T^k_{ij} – компоненты ее тензора деформации. Поскольку связность $\widetilde{\nabla}$ является метрической: $\widetilde{\nabla}g = 0$, то ковариантный тензор деформации T кососимметричен по последним двум аргументам, следовательно, $T_{ijk} = -T_{ikj}$, $T_{ijk} = T^p_{ij}g_{kp}$. Использовав известную формулу

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kp}(\partial_i g_{pj} + \partial_j g_{ip} - \partial_p g_{ij})$$

для вычисления коэффициентов связности Леви-Чивиты для метрики (1), получим

$$\Gamma^1_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin x \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{tg} x & 0 \\ -\operatorname{tg} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^3_{ij} = 0. \tag{13}$$

Первые два условия в (11) запишем в координатах:

$$\partial_i \eta_j - \widetilde{\Gamma}^p_{ij}\eta_p = 0, \quad \partial_i \xi^k + \widetilde{\Gamma}^k_{ip}\xi^p = 0.$$

Так как $\eta = dz$ и $\xi = \partial/\partial z$, то $\widetilde{\Gamma}^3_{ij} = 0$ и $\widetilde{\Gamma}^k_{i3} = 0$. Кроме того, $\Gamma^3_{ij} = 0$ и $\Gamma^k_{i3} = 0$, следовательно, $T_{i3k} = 0$ и $T_{ij3} = 0$.

Теперь исследуем условие инвариантности связности $\widetilde{\nabla}$. Известно, что связность Леви-Чивиты инвариантна относительно группы движений метрики g, поэтому связность $\widetilde{\nabla}$ инвариантна тогда и только тогда, когда инвариантен тензор деформации, следовательно, и ковариантный тензор деформации T. Поэтому производная Ли вдоль базисных векторных полей X_α (4) равна нулю. В координатах это означает, что

$$X^p_\alpha \partial_p T_{ijk} + \partial_i X^p_\alpha T_{pjk} + \partial_j X^p_\alpha T_{ipk} + \partial_k X^p_\alpha T_{ijp} = 0.$$

Проинтегрировав эти уравнения, найдем

$$T_{321} = -T_{312} = a\cos x,$$

где $a = const$, остальные компоненты равны нулю, следовательно, $T^1_{32} = a\cos x$, $T^2_{31} = -\frac{a}{\cos x}$,

$$\widetilde{\Gamma}^1_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin x\cos x & 0 \\ 0 & a\cos x & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Gamma}^2_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{tg} x & 0 \\ -\operatorname{tg} x & 0 & 0 \\ -\frac{a}{\cos x} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Gamma}^3_{ij} = 0. \tag{14}$$

Теперь нетрудно убедиться, что $\widetilde{\nabla}\varphi = 0$. Заметим также, что $T(X,Y,Z) = \eta(X)\Omega(Y,Z)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *На вещественном расширении сферы существует однопараметрическое семейство инвариантных почти контактных метрических связностей, определенное формулой*

$$g(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + a\eta(X)\Omega(Y,Z).$$

Пусть H – распределение на гладком m-мерном многообразии M, т. е. семейство r-мерных $(r < m)$ подпространств H_p касательных пространств T_pM, гладко зависящих от точки $p \in M$.

Линейная связность на M называется согласованной с распределением H, если через каждую точку $p \in M$ в каждом направлении $v_p \in H_p$ проходит единственная геодезическая, касающаяся распределения H (контактная геодезическая) [4].

Нетрудно убедиться, что почти контактные метрические связности на $S^2 \times \mathbb{R}$ согласованы с распределением $H = ker\eta$. Действительно, дифференциальные уравнения геодезических имеют вид

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \cos x\sin x\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + a\cos x\frac{dz}{ds}\frac{dy}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} - \operatorname{tg} x\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} - \frac{a}{\cos x}\frac{dz}{ds}\frac{dx}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Для контактных геодезических $z = const$, $dz/ds = 0$, и мы получим дифференциальные уравнения геодезических сферы. Это означает, что распределение H является вполне геодезическим, что и доказывает наше утверждение.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Галаев С.В.* ∇_N-Эйнштейновы почти контактные метрические многообразия // Вестн. Том. гос. ун-та. Матем. и мех. 2021. Т. 70. С. 5–15.https://doi.org/10.17223/19988621/70/1.

2. *Банару М.Б.* О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в W_4-многообразиях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2018. № 1. С. 67–70.

3. *Паньженский В.И., Климова Т.Р.* Контактная метрическая связность на группе Гейзенберга // Изв. вузов. Матем. 2018. Т. 62, № 11. С. 51–59.

4. *Паньженский В.И., Климова Т.Р.* Контактная метрическая связность с кососимметрическим кручением // Изв. вузов. Матем. 2019. Т. 63, № 11. С. 54–63. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-11-54-63.

5. *Паньженский В.И., Растрепина А.О.* Левоинвариантная контактная метрическая структура на многообразии Sol // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2020. Т. 162, кн. 1. С. 77–90. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.1.77-90.

6. *Diatta A.* Left invariant contact structures on Lie groups // Differ. Geom. Its Appl. 2008. V. 26, No 5. P. 544–552. https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2008.04.001.

7. *Calvaruso G.* Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures // J. Geom. Phys. 2013. V. 69. P. 60–73. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2013.03.001.

8. *Скотт П.* Геометрия на трехмерных многообразиях. Пер. с англ. С.К. Ландо; под ред. В.И. Арнольда. М.: Мир, 1986. 168 с.

9. *Терстон У.* Трехмерная геометрия и топология. Пер. с англ. П.В. Сергеева и др.; под ред. О.В. Шварцмана. М.: МЦНМО, 2001. 312 с.

10. *Blair D.E.* Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Ser.: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 509. Berlin, Heidelberg: Springer, 1976. viii, 148 p. https://doi.org/10.1007/BFb0079307.

11. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса: Печатный дом, 2013. 458 с.

References

1. Galaev S.V. ∇_N-Einstein almost contact metric manifolds. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2021, vol. 70, pp. 5–15. https://doi.org/10.17223/19988621/70/1. (In Russian)

2. Banaru M.B. The almost contact metric hypersurfaces with small type numbers in W_4-manifolds. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2018, vol. 73, no. 1, pp. 38–40. https://doi.org/10.3103/S0027132218010072.

3. Pan'zhenskii V.I., Klimova T.R. The contact metric connection on the Heisenberg group. *Russ. Math.*, 2018, vol. 62, no. 11, pp. 45–52. https://doi.org/10.3103/S1066369X18110051.

4. Panzhenskii V.I., Klimova T.R. The contact metric connection with skew torsion. *Russ. Math.*, 2019, vol. 63, no. 11, pp. 47–55. https://doi.org/10.3103/S1066369X19110070.

5. Pan'zhenskii V.I., Rastrepina A.O. The left-invariant contact metric structure on the Sol manifold. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 1, pp. 77–90. https://doi.org/ 10.26907/2541-7746.2020.1.77-90. (In Russian)

6. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups. *Differ. Geom. Its Appl.*, 2008, vol. 26, no. 5. pp. 544–552. https://doi.org/ 10.1016/j.difgeo.2008.04.001.

7. Calvaruso G. Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures. *J. Geom. Phys.*, 2013, vol. 69, pp. 60–73. https://doi.org/ 10.1016/j.geomphys.2013.03.001.

8. Scott P. *Geometriya na trekhmernykh mnogoobraziyakh* [The Geometries of 3-Manifolds]. Lando S.K. (Trans.). Arnol'd V.I. (Ed.). Moscow, Mir, 1986. 168 p. (In Russian)

9. Thurston W. *Trekhmernaya geometria i topologia* [Three-Dimensional Geometry and Topology]. Sergeev P.V. et al. (Trans.). Shvartsman O.V. (Ed.). Moscow, MTsNMO, 2001. 312 p. (In Russian)

10. Blair D.E. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry.* Ser.: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 509. Berlin, Heidelberg, Springer, 1976. viii, 148 p. https://doi.org/10.1007/BFb0079307.

11. Kirichenko V.F. *Differentsial'no-geometricheskie struktury na mnogoobraziyakh* [Differential-Geometric Structures on Manifolds]. Odessa, Pechatnyi Dom, 2013. 458 p. (In Russian)

Информация об авторах

Марина Валерьевна Сорокина, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Математическое образование», Пензенский государственный университет

E-mail: *sorokina_m@list.ru*

ORCID: https://orcid.org/0009-0006-7335-9016

Юлия Дмитриевна Морщинкина, студент, Пензенский государственный университет

E-mail: *juliamorwinkina@mail.ru*

Author Information

Marina V. Sorokina, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematics Education, Penza State University

E-mail: *sorokina_m@list.ru*

ORCID: https://orcid.org/0009-0006-7335-9016

Yulia V. Morshchinkina, Student, Penza State University

E-mail: *juliamorwinkina@mail.ru*

Поступила в редакцию 31.05.2023
Принята к публикации 28.02.2025

Received May 31, 2023
Accepted February 28, 2025