

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.51: 517.968.7: 519.642.2

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.5-15>**Приближения решений одного класса условно
корректных интегро-дифференциальных уравнений****Ю.Р. Агачев, М.Ю. Першагин** ✉*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия*✉ Michael.Pershagin@kpfu.ru**Аннотация**

Для одного частного класса условно корректных интегро-дифференциальных уравнений в новой паре весовых пространств Соболева предложен другой способ построения приближений (в частности, конечномерных приближений) к решению соответствующей краевой задачи и дано теоретическое обоснование вычислительной схемы при минимальных дифференциальных свойствах коэффициентов уравнения.

Ключевые слова: весовое пространство Соболева, интегро-дифференциальное уравнение, прямой метод, проекционный метод, сходимость

Для цитирования: Агачев Ю.Р., Першагин М.Ю. Приближения решений одного класса условно корректных интегро-дифференциальных уравнений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 5–15. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.5-15>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.5-15>

Approximations of solutions for a class of conditionally well-posed integro-differential equations

J.R. Agachev, M.Yu. Pershagin ✉

Kazan Federal University, Kazan, Russia

✉ Michael.Pershagin@kpfu.ru

Abstract

In this article, for a specific class of conditionally well-posed integro-differential equations in a novel pair of weighted Sobolev spaces, an alternative method for constructing approximations (particularly finite-dimensional ones) to the solution of the corresponding boundary value problem is proposed, and its theoretical justification is provided for minimal differential properties of the coefficients of the equation.

Keywords: weighted Sobolev space, integro-differential equation, direct method, projection method, convergence

For citation: Agachev J.R., Pershagin M.Yu. Approximations of solutions for a class of conditionally well-posed integro-differential equations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 5–15.

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.5-15>. (In Russian)

Пусть $\rho(t)$ – такая весовая функция на интервале $[-1, 1]$, что $1/\rho(t)$ также является весовой, а $m + 1$ и p – натуральные числа, причем $p > m$. Обозначим через $y(t)$ и $h(t, s)$ известные функции, заданные на интервалах $[-1, 1]$ и $[-1, 1]^2$ соответственно. Рассмотрим задачу нахождения решения интегро-дифференциального уравнения

$$Kx \equiv x^{(m)}(t) + \int_{-1}^1 h(t, s)x^{(p)}(s) ds = y(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

при краевых условиях¹

$$l_i(x) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad (2)$$

где l_i , $i = \overline{0, m-1}$, – линейно независимые функционалы, определенные на пространстве $C^{(m-1)}[-1, 1]$ функций, $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых на $[-1, 1]$.

Пусть $W^r L_{2,\rho}[-1, 1] \equiv W_{2,\rho}^r$ ($r \geq 1$) есть пространство Соболева функций, абсолютно непрерывных на $[-1, 1]$ и имеющих производную порядка r из пространства Лебега

¹При $m = 0$ краевые условия отсутствуют.

$L_{2,\rho}(-1,1)$ функций, квадратично-суммируемых с весом $\rho(t)$ на интервале $(-1,1)$. Обозначим через $q(t) = (1 - t^2)^{p-m-1/2}$ вес Гегенбауэра, и пусть $W^r L_{2,q}[-1,1] = W_{2,q}^r$ есть соответствующее пространство Соболева с весом $q(t)$.

Задача (1) и (2) при $p > m \geq 0$ является некорректно поставленной (по Адамару) на парах функциональных пространств X искомых элементов и Y правых частей, традиционных для дифференциальных уравнений. Вместе с тем в работе [1] задачи для интегро-дифференциальных уравнений в случае, когда порядок внутреннего дифференциального оператора выше порядка соответствующего внешнего дифференциального оператора (следовательно, для уравнения (1)), отнесены к классу условно корректных с учетом возможности их корректной постановки за счет специального выбора пары пространств X и Y (про условно корректные уравнения см. монографию [2]). В работе [3] (см. также [4]) доказано, что в качестве такой пары может быть выбрана пара пространств $X = \overset{\circ}{W}_{2,q}^p$ функций из $W_{2,q}^p$, удовлетворяющих краевым условиям (2), и $Y = W_{2,q}^{p-m}$. При этом нормы в этих пространствах являются согласованными, а именно:

$$\|y\|_Y = \sqrt{\sum_{k=0}^{p-m} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{k-1/2} |y^{(k)}(t)|^2 dt}, \quad y \in Y,$$

$$\|x\|_X = \sqrt{\sum_{k=0}^{p-m} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{k-1/2} |x^{(m+k)}(t)|^2 dt}, \quad x \in X.$$

В этом случае для нахождения решения задачи можно применить тот или иной прямой метод, что позволит построить вычислительные схемы, более простые по сравнению с известными методами для чисто некорректных задач. В работе [3] (см. также [4]) при некоторых предположениях относительно функций h и y в уравнении (1) нами дано обоснование общего полиномиального проекционного метода, построенного на основе оператора проектирования, обладающего определенными свойствами. В частности, доказана сходимость полиномиального метода Галеркина².

Специальный вид уравнения (1) позволяет применить другой подход к построению приближений к решению задачи (1) и (2) путем выбора других пар пространств (X, Y) для корректной постановки задачи.

Рассмотрим *новую* пару пространств (X, Y) функций, определенных на $[-1, 1]$, где $Y = W_{2,\rho}^{p-m}$ – пространство функций, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $p - m - 1$ и производную порядка $p - m$ из пространства $L_{2,\rho}$, $X = \overset{\circ}{W}_{2,\rho}^p$ – пространство функций, удовлетворяющих краевым условиям (2). Нормы в этих пространствах определим следующим образом:

$$\|y\|_Y = \|y\|_C + \|y^{(p-m)}\|_{2,\rho}, \quad y \in Y,$$

$$\|x\|_X = \|x^{(m)}\|_C + \|x^{(p)}\|_{2,\rho}, \quad x \in X.$$

Всюду далее запись $h \in Y \times L_{2,1/\rho}$ означает, что функция $h(t, s)$, определенная на $[-1, 1]^2$, по переменной t принадлежит пространству Y равномерно относительно s , а по s

²В названной работе эти результаты получены для более общего интегро-дифференциального уравнения.

равномерно относительно переменной t принадлежит пространству $L_{2,1/\rho}$. При этом норму $\|h\|_{Y \times L_{2,1/\rho}}$ введем по формуле

$$\|h\|_{Y \times L_{2,1/\rho}} = \| \|h(t, \cdot)\|_{2,1/\rho} \|_Y.$$

Имеет место

Лемма 1. Пусть $y \in Y$, $h \in Y \times L_{2,1/\rho}$. Тогда задача (1) и (2) на паре (X, Y) является условно корректной.

Отметим, что лемма очевидным образом следует из согласованности норм в пространствах X и Y и неравенства Гёльдера. При этом заметим, что пространство $W_{2,\rho}^r$ при $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ непрерывно вложено в пространство W_{2,q_r}^r , где $q_r(t) = (1-t^2)^{r-1/2}$.³

Продифференцируем уравнение (1) $(p-m-1)$ раз и рассмотрим функцию $z(t) \equiv x^{(p-1)}(t)$. Тогда для $z(t)$ получим уравнение

$$K_1 z \equiv z(t) + \int_{-1}^1 \tilde{h}(t, s) z'(s) ds = \tilde{y}(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (3)$$

где функции

$$\tilde{h}(t, s) = \frac{\partial^{p-m-1}}{\partial t^{p-m-1}} h(t, s), \quad \tilde{y}(t) = y^{(p-m-1)}(t)$$

являются абсолютно непрерывными на $[-1, 1]$ по переменной t .

Введем пространство $Z \equiv W_{2,\rho}^1[-1, 1] \equiv W_{2,\rho}^1$ с нормой

$$\|z\|_Z = \|z\|_C + \|z'\|_{2,\rho}, \quad z \in Z.$$

Заметим, что эта норма эквивалентна норме

$$\|z\| = \|z\|_{2,1/\rho} + \|z'\|_{2,\rho},$$

поскольку

$$z(t) = \int_{\xi}^t z'(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 z(\tau) d\tau,$$

где точка $\xi \in (-1, 1)$ выбрана из условия

$$z(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 z(\tau) d\tau.$$

Уравнение (3) в пространстве Z запишем в операторной форме:

$$K_1 z \equiv z + \tilde{H} z = \tilde{y} \quad (z, \tilde{y} \in Z), \quad (4)$$

³Другими словами, в этом частном случае веса $\rho(t)$ имеем пару более узких весовых пространств Соболева.

где оператор $\tilde{H}$ задан формулой

$$\tilde{H}z \equiv H\tilde{h}z \equiv \int_{-1}^1 \tilde{h}(t, s)z'(s) ds.$$

Пусть $Z_n \subset Z$ – конечномерное подпространство размерности N , $\tilde{y}_n \in Z_n$, $\tilde{H}_n$ – линейный оператор, действующий в подпространстве Z_n , и $P_n : Z \rightarrow Z_n$ – произвольный линейный оператор проектирования. Будем искать приближение к решению уравнения (4) в виде точного решения уравнения

$$K_{1,n}z_n \equiv z_n + \tilde{H}_nz_n = \tilde{y}_n \quad (z_n, \tilde{y}_n \in Z_n), \quad (5)$$

задающего некоторый прямой метод решения уравнения (4).

При построении приближений к решению общей задачи (1) и (2) учтем, что задача (1) и (2) может быть сведена к эквивалентной задаче Коши для уравнения (1) с новыми известными функциями $h(t, s)$ и $y(t)$ (см., например, [5]). Поэтому для определенности и без ограничения общности далее будем считать, что общие краевые условия являются начальными:

$$l_i(x) \equiv x^{(i)}(-1) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}. \quad (2')$$

Предположим, что уравнение (5) имеет единственное решение z_n^* хотя бы при всех n , начиная с некоторого натурального n_0 . Тогда приближения к решению задачи (1), (2') можно построить по формуле

$$\begin{aligned} x_n^*(t) &= \int_{-1}^t \int_{-1}^{t_m} \dots \int_{-1}^{t_2} x_n^{*(m)}(t_1) dt_1 \dots dt_{m-1} dt_m = \\ &= \int_{-1}^t \int_{-1}^{t_m} \dots \int_{-1}^{t_2} [y(t_1) - (Hh z_n^*)(t_1)] dt_1 \dots dt_{m-1} dt_m. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что x_n^* является функцией из основного пространства X .

Справедлива

Теорема 1. Пусть выполнены предположения:

- 1) $y \in W_{2,\rho}^{p-m}$, $h \in W_{2,\rho}^{p-m} \times L_{2,1/\rho}$;
- 2) задача (1), (2') имеет единственное решение при любой правой части из $W_{2,\rho}^{p-m}$;
- 3) однородное уравнение, соответствующее уравнению (4), имеет лишь тривиальное решение;
- 4) правая часть $\tilde{y}_n$ и оператор $\tilde{H}_n : Z_n \rightarrow Z_n$ в уравнении (5) обладают свойствами

$$\|\tilde{y} - \tilde{y}_n\|_Z \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\|\tilde{H}z_n - \tilde{H}_nz_n\|_Z \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall z_n \in Z_n.$$

Тогда при всех натуральных n , начиная с некоторого, однозначно определены приближения $x_n^* \in X$, сходящиеся к точному решению x^* задачи (1), (2') со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{\|\tilde{y} - \tilde{y}_n\|_Z + \|\tilde{H} - \tilde{H}_n\|_{Z_n \rightarrow Z_n}\}.$$

В наиболее важном частном случае уравнения (5), задающего проекционный метод решения уравнения (4), а именно, уравнения

$$K_{2,n}z_n \equiv z_n + P_n\tilde{H}z_n = P_n\tilde{y} \quad (z_n \in Z_n) \quad (5')$$

имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1)–3) теоремы 1 и, кроме того, операторы $P_n : Z \rightarrow Z_n$ в уравнении (5') обладают свойством

$$\|z - P_n z\|_Z \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall z \in Z.$$

Тогда при всех n , начиная с некоторого натурального n_0 , однозначно определены приближения $x_n^* \in X$, сходящиеся к точному решению x^* со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{\|\tilde{h} - P_n^t \tilde{h}\|_{Z \times L_{2,1/\rho}} + \|\tilde{y} - P_n \tilde{y}\|_Z\}.$$

Сформулированные теоремы, с учетом полной непрерывности в пространстве Z оператора $\tilde{H}$, очевидным образом следуют из теоремы 7 главы 1 монографии [1].

Применим теперь эти теоремы для построения приближений к решению задачи Коши (1), (2'), используя методы коллокации и механических квадратур нахождения функций $z_n(t)$.

Пусть $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ – вес Чебышева второго рода, X, Y и Z – соответствующие весовые пространства Соболева. Обозначим через L_n полиномиальный оператор Лагранжа, построенный по узлам Чебышева первого рода

$$t_k = \cos\{(2k+1)\pi/(2n+2)\}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (7)$$

Зафиксируем также квадратурную формулу Эрмита – Чебышева

$$\int_{-1}^1 \frac{z(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^n z(t_k),$$

сходящуюся на всем пространстве функций, непрерывных на интервале $[-1, 1]$.

Приближения к решению уравнения (4) построим в виде

$$z_n(t) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(t), \quad (8)$$

где $T_k(t) = \cos(k \arccos t)$ – полином Чебышева первого рода степени k , а $\{c_k\}$ – неизвестные коэффициенты. Определим их из системы

$$\sum_{k=0}^n \alpha_{jk} c_k = \tilde{y}(t_j), \quad j = \overline{0, n}, \quad (9)$$

где коэффициенты $\{\alpha_{jk}\}$ найдем по одной из формул:

$$\alpha_{jk} = T_k(t_j) + k \int_{-1}^1 \tilde{h}(t_j, s) U_{k-1}(s) ds \quad (10)$$

в случае метода коллокации;

$$\alpha_{jk} = T_k(t_j) + \frac{\pi k}{n+1} \sum_{i=0}^n \tilde{h}(t_j, t_i) \sqrt{1 - t_i^2} U_{k-1}(t_i) \quad (11)$$

в случае метода квадратур. В формулах (10) и (11)

$$U_{k-1}(s) = \sin(k \arccos s) / \sqrt{1 - s^2}$$

есть полином Чебышева второго рода степени $k - 1$.

Если система (9) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$, то по формуле (8) будут однозначно определены приближения $z_n^*(t) = \sum_{k=0}^n c_k^* T_k(t)$. В свою очередь, через эти приближения по формуле (6) будут построены функции $x_n^*(t)$, являющиеся приближениями решения задачи (1), (2').

Имеют место следующие результаты.

Теорема 3. Пусть $\rho(t) = \sqrt{1 - t^2}$ и выполнены предположения 1)–3) теоремы 1.

Тогда система уравнений (9), (10) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ при всех натуральных n , начиная с некоторого. Приближения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (6), сходятся по норме пространства X к точному решению задачи (1), (2') со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_n^t(\partial^{p-m} h / \partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} + E_n(y^{(p-m)})_{L_{2,\rho}}\}.$$

Теорема 4. Пусть $\rho(t) = \sqrt{1 - t^2}$ и выполнены предположения 1)–3) теоремы 1. Пусть, кроме того, частная производная порядка $p - m$ функции $\bar{h}(t, s) \equiv h(t, s) \cdot \sqrt{1 - s^2}$ непрерывна по переменной s равномерно относительно t .

Тогда система уравнений (9), (11) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ при всех n , начиная с некоторого натурального. Приближения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (6), сходятся по норме пространства X к точному решению задачи (1), (2') со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_n^t(\partial^{p-m} h / \partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} + E_n^s(\partial^{p-m} \bar{h} / \partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times C} + E_n(y^{(p-m)})_{L_{2,\rho}}\}.$$

В теоремах 3 и 4 $E_n(f)_{L_{2,\rho}}$ есть наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\rho}$ алгебраическими полиномами степени не выше n . Для функций двух переменных $f(t, s) \in L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}$ под $E_n^t(f)_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}}$ понимаем частное наилучшее приближение по переменной t алгебраическими полиномами степени не выше n в метрике соответствующего пространства двух переменных; аналогично понимаем для $f(t, s) \in L_{2,\rho} \times C$ величину $E_n^s(f)_{L_{2,\rho} \times C}$.

Теорема 3 следует из теоремы 2, так как оператор P_n метода коллокации является полиномиальным оператором Лагранжа по узлам Чебышева первого рода и из работы [6] вытекает, что

$$\|z - P_n z\|_Z = O\{E_n(z)_Z\} = O\{E_n(z')_{L_{2,\rho}}\}, \quad \forall z \in Z.$$

При доказательстве теоремы 4 достаточно воспользоваться свойством наивысшей алгебраической степени точности квадратурной формулы Эрмита–Чебышева и результатами работы [7].

Если требуется построить конечномерные приближения к решению задачи (1), (2') из некоторого конечномерного подпространства $X_n \subset X$, то их можно определить по формуле

$$x_n^*(t) = \int_{-1}^t \int_{-1}^{t_m} \dots \int_{-1}^{t_2} Q_n[y(t_1) - (Hh z_n^*)(t_1)] dt_1 \dots dt_{m-1} dt_m, \quad (12)$$

где $Q_n : W_{2,\rho}^{p-m} \rightarrow Y_n$ – произвольно зафиксированный линейный оператор проектирования в конечномерное подпространство Y_n пространства $W_{2,\rho}^{p-m}$, размерность которого на m единиц меньше размерности X_n . В этом случае справедливы следующие результаты.

Теорема 5. Пусть $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$, X_n – подпространство алгебраических полиномов степени не выше $n+m$, удовлетворяющих начальным условиям (2'), и пусть выполнены предположения:

- 1) $y \in W_{2,\rho}^{p-m}$;
- 2) $h \in W_{2,\rho}^{p-m} \times L_{2,1/\rho}$;
- 3) условие 3) теоремы 1.

Если оператор Q_n есть полиномиальный оператор Лагранжа L_n , построенный по узлам (7), то приближения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (12), сходятся по норме пространства $W_{2,\rho}^m$ к точному решению задачи (1), (2'). При этом имеет место оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_{2,\rho}^m} = O\{E_n(y^{(p-m)})_{L_{2,\rho}} + E_n^t(\partial^{p-m}h/\partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}}\}.$$

Доказательство. Очевидно, имеем соотношения

$$x^{*(m)}(t) = y(t) - Hhz^{*'}(t),$$

$$x_n^{*(m)}(t) = Q_n[y(t) - Hhz_n^{*'}(t)].$$

Поэтому последовательно найдем

$$\begin{aligned} \|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_{L_{2,\rho}} &\leq \|y - Q_n y\|_{L_{2,\rho}} + \|Hhz^{*'} - Q_n Hhz_n^{*'}\|_{L_{2,\rho}} \leq \\ &\leq \|y - Q_n y\|_{L_{2,\rho}} + \|h - Q_n^t h\|_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} \cdot \|z^{*'}\|_{L_{2,\rho}} + \|Q_n Hh(z^{*'} - z_n^{*'})\|_{L_{2,\rho}} \leq \\ &\leq \|y - Q_n y\|_{L_{2,\rho}} + c_1 \|h - Q_n^t h\|_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} + c_2 \|h\|_{C \times L_{2,1/\rho}} \cdot \|z^{*'} - z_n^{*'}\|_{L_{2,\rho}} = \\ &= O\{\|y - Q_n y\|_{L_{2,\rho}} + \|h - Q_n^t h\|_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} + \|z^{*'} - z_n^{*'}\|_{L_{2,\rho}}\}, \end{aligned}$$

где c_1, c_2 – вполне определенные положительные постоянные. Отсюда непосредственно вытекает порядковая оценка

$$\|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_{W_{2,\rho}^m} = O\{\|y - Q_n y\|_{L_{2,\rho}} + \|h - Q_n^t h\|_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} + \|z^{*'} - z_n^{*'}\|_{L_{2,\rho}}\}. \quad (13)$$

В условиях теоремы 5 оператор Q_n есть оператор Лагранжа, построенный по узлам Чебышева первого рода. Поэтому из известных результатов теории приближений следует, что

$$\begin{aligned} \|y - Q_n y\|_{L_{2,\rho}} &= O\{E_n(y)_C\} = O\{E_n(y^{(p-m-1)})_C/n^{p-m-1}\} = \\ &= O\{E_n(y^{(p-m)})_{L_{2,\rho}}/n^{p-m-1/2}\} = o\{E_n(y^{(p-m)})_{L_{2,\rho}}\}; \\ \|h - Q_n^t h\|_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} &= o\{E_n^t(\partial^{p-m}h/\partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}}\}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\|z^* - z_n^*\|_{W_{2,\rho}^1} = O\{E_n(y^{(p-m)})_{L_{2,\rho}} + E_n^t(\partial^{p-m}h/\partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}}\}.$$

Последние три порядковые оценки вместе с оценкой (13) доказывают справедливость утверждения теоремы 5. $\square$

Теорема 6. Пусть выполнены предположения теоремы 5. Пусть, кроме того, частная производная порядка $p - m - 1$ по переменной t функции $\bar{h}(t, s) \equiv h(t, s) \cdot \sqrt{1 - s^2}$ непрерывна по переменной s равномерно относительно t .

Тогда система уравнений (9), (11) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ при всех n , начиная с некоторого натурального. Приближения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (12), сходятся по норме пространства $W_{2,\rho}^m$ к точному решению задачи (1), (2') со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_{2,\rho}^m} = O\{E_n(y^{(p-m)})_{L_{2,\rho}} + E_n^t(\partial^{p-m}h/\partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} + E_n^s(\partial^{p-m}\bar{h}/\partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}}\}.$$

Утверждение теоремы 6 следует из известного факта о том, что метод квадратур представляет собой возмущение метода коллокации вполне непрерывным слагаемым.

Замечание 1. Полученные результаты по методам коллокации и механических квадратур сохраняются в случае узлов, являющихся экстремальными точками полинома Чебышева первого рода. Этот результат вытекает из работы [10] по исследованию асимптотических свойств полиномиального оператора Лагранжа, построенного по указанным узлам в первом весовом пространстве Соболева.

Замечание 2. В случае $m = 0$, $p = 1$, т.е. для уравнения (3), в работе [6] доказана оптимальность по порядку точности в первом весовом пространстве Соболева методов Галеркина, моментов и наименьших квадратов.

Замечание 3. В работах [8, 9] для уравнения (3) дано обоснование методов коллокации, подобластей и механических квадратур, построенных по узлам Чебышева первого рода.

Замечание 4. В работе [1] при достаточно жестких предположениях относительно коэффициентов уравнения по внешней переменной (переменной t) в пространстве функций, имеющих p непрерывных производных, обоснован метод механических квадратур решения краевых задач для более общих уравнений вида (2) при $m = 0$. В ней в пространстве p раз непрерывно дифференцируемых функций дано обоснование метода механических квадратур, основанного на квадратурной формуле Эрмита – Чебышева. Однако сходимость метода доказана при жестком условии принадлежности коэффициентов уравнения классу $2p$ раз непрерывно дифференцируемых функций.

Таким образом, предложенный нами способ построения приближений к решению задачи (1) и (2) позволил получить сходимость построенных приближений при естественных требованиях принадлежности коэффициентов уравнения (1) классу $W_{2,\rho}^{p-m}$ по внешней переменной. В случае полиномиальных приближений сходимость удалось показать по норме пространства Соболева $W_{2,\rho}^m$.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. Некоторые вопросы теории приближенных методов, II // Изв. вузов. Матем. 1968, № 10. С. 21–29.
2. Кабанikhин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
3. Агачев Ю.Р., Першагин М.Ю. Корректная постановка и полиномиальные приближения решений краевых задач для условно корректных интегро-дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Современ. матем. и ее прил. Темат. Обз. М.: ВИНТИ РАН, 2020. Т. 175. С. 69–78.
4. Агачев Ю.Р., Першагин М.Ю. Корректная постановка и решение краевых задач для одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Матер. междуна. конф. по алгебре, анализу и геометрии. Казань: Казан. ун-т, изд-во АН РТ, 2016. С. 82–83.
5. Агачев Ю.Р., Першагин М.Ю. Корректная постановка условно корректных интегро-дифференциальных уравнений в новой паре невесовых пространств Соболева // Изв. вузов. Матем. 2017. № 8. С. 80–85.
6. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. Оптимизация прямых методов решения одного класса интегродифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. 2003. № 12. С. 31–40.
7. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. Интерполяционные полиномы Лагранжа в пространствах Соболева // Изв. вузов. Матем. 1997. № 5. С. 7–19.
8. Ермолаева Л.Б. О решении некоторых интегродифференциальных уравнений // ММТТ. 2022. № 4. С. 11–15. <https://doi.org/10.52348/2712-8873-ММТТ-2022-4-11>.
9. Ермолаева Л.Б. Решение некоторого интегродифференциального уравнения // Вестн. НГПУ. 2021. № 4 (29). С. 45–48.
10. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. Интерполирование по экстремальным точкам многочленов Чебышева и его применения // Изв. вузов. Матем. 2005. № 5. С. 22–41.

References

1. Gabdulkhaev B.G. Some questions of the theory of approximate methods, II. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1968, no. 10, pp. 21–29. (In Russian)
2. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-Posed Problems]. Novosibirsk, Sib. Nauchn. Izd., 2009. 457 p. (In Russian)
3. Agachev J.R., Pershagin M.Yu. Well-posedness of boundary-value problems for conditionally well-posed integro-differential equations and polynomial approximations of their solutions. *Itoги Nauki i Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Ee Prilozh. Temat. Obz.*, 2020, vol. 175, pp. 69–78. (In Russian)
4. Agachev J.R., Pershagin M.Yu. Well-posedness and solution of boundary value problems for one class of integro-differential equations. *Mater. Mezhdun. konf. po algebre, analizu i geometrii*. [Proc. Int. Conf. on Algebra, Analysis, and Geometry]. Kazan, Kazan. Univ., Izd. Akad. Nauk RT, 2016, pp. 82–83. (In Russian)
5. Agachev Y.R., Pershagin M.Y. Well-posed integro-differential equations in a new pair of weight-free Sobolev spaces. *Russ. Math.*, 2017, vol. 61, no. 8, pp. 71–75. <https://doi.org/10.3103/S1066369X17080084>.

6. Gabdulkhaev B.G., Ermolaeva L.B. Optimization of direct solution methods for a class of integro-differential equations. *Russ. Math.*, 2003, vol. 47, no. 12, pp. 28–37.
7. Gabdulkhaev B.G., Ermolaeva L.B. The Lagrange interpolation polynomials in Sobolev spaces. *Russ. Math.*, 1997, vol. 41, no. 5, pp. 4–16.
8. Ermolaeva L.B. On the solution of some integro-differential equations. *MMTT*, 2022, no. 4, pp. 11–15. <https://doi.org/10.52348/2712-8873-MMTT-2022-4-11>. (In Russian)
9. Ermolaeva L.B. Solution of some integro-differential equation. *Vestn. NGPU*, 2021, no. 4 (29), pp. 45–48. (In Russian)
10. Gabdulkhaev B.G., Ermolaeva L.B. Interpolation over extreme points of Chebyshev polynomials and its applications. *Russ. Math.*, 2005, vol. 49, no. 5, pp. 19–37.

Информация об авторах

Юрий Романович Агачев, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Теории функций и приближений» Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Juriy.Agachev@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6640-2721>

Михаил Юрьевич Першагин, старший преподаватель кафедры «Теории функций и приближений» Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Michael.Pershagin@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8473-8851>

Author Information

Juriy R. Agachev, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Theory of Functions and Approximations, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University

E-mail: Juriy.Agachev@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6640-2721>

Mikhail Yu. Pershagin, Senior Lecturer, Department of Theory of Functions and Approximations, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University

E-mail: Michael.Pershagin@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8473-8851>

Поступила в редакцию 18.09.2024

Принята к публикации 24.12.2024

Received September 18, 2024

Accepted December 24, 2024