

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.98

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.651-659

О СВОЙСТВАХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ПОРЯДКА ν В КОНЕЧНОМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

Ю.Х. Эшкабилов, Ж.З. Истамов

*Каршинский государственный университет, г. Карши, 180119,
Республика Узбекистан*

Аннотация

Изучены необходимые и достаточные условия стохастичности и бистохастичности положительных операторов. Доказаны критерии стохастичности для непрерывных положительных операторов в $\mathbb{R}^m$. Получено необходимое и достаточное условие для бистохастичности непрерывных положительных операторов.

Ключевые слова: стохастический оператор, бистохастический оператор, конус, положительный оператор, перестановка элемента конуса

Введение

Ряд задач физики, биологии, экономики и других наук сводится к исследованию нелинейных операторов в вещественном конечномерном пространстве $\mathbb{R}^m$. Пусть $S^{m-1} - (m-1)$ -мерный базисный симплекс в $\mathbb{R}^m$. Непрерывный положительный оператор S на $\mathbb{R}^m$ называется стохастическим, если $S(S^{m-1}) \subset S^{m-1}$.

В работах [1–5] исследован ряд свойств квадратичных стохастических операторов. В [6] рассмотрен класс квадратичных стохастических операторов, которые названы бистохастическими квадратичными операторами; получено необходимое и достаточное условие для бистохастичности квадратичных операторов в $\mathbb{R}^m$.

В [7] введено понятие кубических стохастических операторов. Описано применение этих операторов в популяционной генетике и изучены траектории одного кубического стохастического оператора в симплексе S^{m-1} .

В [8] показано, что множество бистохастических квадратичных операторов на $\mathbb{R}^m$ является выпуклым многогранником (см. также [9]). Получено достаточное условие для крайности бистохастического квадратичного оператора, а также найдено количество крайних точек множества бистохастических квадратичных операторов в двумерном симплексе S^2 .

В [10] введено понятие произвольного бистохастического оператора. Изучены свойства произвольных бистохастических операторов и получено необходимое условие их бистохастичности. Доказана эргодическая теорема для произвольных бистохастических операторов порядка ν в $\mathbb{R}^m$.

Настоящая работа посвящена изучению необходимых и достаточных условий стохастичности и бистохастичности положительных операторов в $\mathbb{R}^m$. В разделе 1 изложены необходимые сведения и определения. В разделе 2 доказан один критерий стохастичности порядка ν для непрерывных положительных операторов в $\mathbb{R}^m$.

В разделе 3 получено необходимое и достаточное условие бистохастичности порядка ν для непрерывных положительных операторов.

1. Необходимые сведения и определения

Для $q \in \mathbb{N}$ определим подмножество $N_{\leq q} = \{1, 2, 3, \dots, q\} \subset \mathbb{N}$. Множество

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \sum_{j=1}^m x_j = 1, x_j \geq 0, j \in N_{\leq m}\}$$

называется $(m-1)$ -мерным базисным симплексом в $\mathbb{R}^m$. Обозначим через $S_{>}^{m-1}$ внутренность симплекса S^{m-1} , т. е.

$$S_{>}^{m-1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \sum_{j=1}^m x_j = 1, x_j > 0, j \in N_{\leq m}\}.$$

Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная $m \times m$ -матрица с элементами из множества вещественных чисел. Матрица A называется стохастической, если $a_{ij} \geq 0 \forall i, j \in N_{\leq m}$, а также

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} = 1, j \in N_{\leq m}.$$

Иногда стохастическую матрицу называют линейным стохастическим оператором в $\mathbb{R}^m$. Очевидно, что для линейного стохастического оператора A выполняется свойство $A(S^{m-1}) \subset S^{m-1}$. Обозначим через $\mathbb{R}_+^m$ обычный конус пространства $\mathbb{R}^m$, т. е.

$$\mathbb{R}_+^m = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_j \geq 0, j \in N_{\leq m}\}.$$

Когда речь идет о квадратных $m \times m$ -матрицах A , будем понимать действие матрицы A на элемент $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ как транспонированной матрицы, образованной умножением двух матриц A и x , т. е. $A(x) = x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m) = (A \cdot x)^T$.

Оператор $\mathbf{P} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется положительным, если $\mathbf{P} : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m$, и обозначим его через $\mathbf{P} \geq \theta$, где θ – нулевой оператор в $\mathbb{R}^m$. Далее через S_n обозначим группу перестановок порядка $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1 ([9]). Пусть $\nu \in \mathbb{N}$ – произвольный элемент. Непрерывный оператор $\mathbf{S} : x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \rightarrow \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)) \in \mathbb{R}^m$ будем называть стохастическим оператором порядка ν , если $\mathbf{S} \geq \theta$ и

$$\varphi_k(x) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\nu=1}^m P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\nu}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad k \in N_{\leq m},$$

где

$$P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} \geq 0, \quad i_j = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, \nu}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (1)$$

$$P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} = P_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \dots i_{\pi(\nu)}, k}, \quad k = \overline{1, m} \quad (2)$$

для любой перестановки $\pi \in S_m$ и

$$\sum_{k=1}^m P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} = 1, \quad i_j = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, \nu}. \quad (3)$$

Из условий (1)–(3) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^m \varphi_k(x) = (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^\nu, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Отсюда следует, что оператор $\mathbf{S}$ отображает симплекс S^{m-1} в себя. При $\nu = 1$ оператор $\mathbf{S}$ является линейным стохастическим оператором, при $\nu = 2$ этот оператор является квадратичным стохастическим оператором, при $\nu = 3$ оператор $\mathbf{S}$ является кубическим стохастическим оператором и т. д. В дальнейшем обозначим через $\mathbf{S}^{[\nu]}$ стохастический оператор порядка ν .

Для каждого вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_+^m$ положим $x \downarrow = (x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[m]})$, $x \downarrow$ называется [6] перестановкой x , где $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq x_{[3]} \geq \dots \geq x_{[m]}$.

Определение 2 ([11]). Говорят, что x мажорируется y (или y мажорирует x) и пишут $x \prec y$, если $\sum_{i=1}^q x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^q y_{[i]}$, $q = 1, m-1$.

Квадратная $m \times m$ -матрица $A = (a_{ij})$ называется бистохастической, если $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in N_{\leq m}$ и

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} = 1.$$

Бистохастическую матрицу A иногда называют линейным бистохастическим оператором в $\mathbb{R}^m$. Известно [11], что для каждого линейного бистохастического оператора A верно свойство $Ax \prec x \quad \forall x \in S^{m-1}$.

Определение 3 ([9]). Стохастический оператор $\mathbf{S}^{[\nu]}$ называется бистохастическим оператором порядка ν , если $\mathbf{S}^{[\nu]}x \prec x \quad \forall x \in S^{m-1}$.

В дальнейшем для бистохастического оператора $\mathbf{B}$ порядка ν будем использовать обозначение $\mathbf{B}^{[\nu]}$.

2. Критерии стохастичности положительных операторов

В этом разделе исследовано необходимое и достаточное условие для стохастичности положительных операторов в $\mathbb{R}^m$.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{S}$ – стохастический оператор. Тогда существует набор $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_m$ из непрерывных операторов $\mathbf{S}_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $j \in N_{\leq m}$, для которых каждый оператор $\mathbf{S}_j$ является стохастическим, и выполняется равенство

$$\mathbf{S}(x) = x_1 \mathbf{S}_1(x) + x_2 \mathbf{S}_2(x) + \dots + x_m \mathbf{S}_m(x), \quad x \in S^{m-1}. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{S}(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$, $x \in \mathbb{R}^m$, – стохастический оператор. По определению стохастического оператора имеем

$$\varphi_k(x) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\nu=1}^m P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\nu}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad k \in N_{\leq m}. \quad (5)$$

В дальнейшем в (5) используем равенство

$$P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\nu} = P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} \dots x_m^{\tau_m},$$

где через $\tau_j = \tau_j(i_1, i_2, \dots, i_\nu)$ обозначена степень переменной x_j в выражении $P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\nu}$. Очевидно, что $\tau_j \in N_{\leq \nu} \cup \{0\}$ и $\sum_{j=1}^m \tau_j = \nu$. Тогда для произвольного $x \in \mathbb{R}^m$ имеем

$$\varphi_k(x) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\nu=1}^m P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} \dots x_m^{\tau_m}, \quad k \in N_{\leq m}.$$

Легко заметить, что частными производными функций $\varphi_k(x)$, $k \in N_{\leq m}$, по каждым аргументам x_j являются непрерывные функции на $\mathbb{R}^m$. Определим операторы $\mathbf{S}_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $j \in N_{\leq m}$, равенствами

$$\mathbf{S}_j(x) = (\varphi_1^{(j)}(x), \varphi_2^{(j)}(x), \dots, \varphi_m^{(j)}(x)), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad (6)$$

где

$$\varphi_k^{(j)}(x) = \frac{1}{\nu} \varphi_k'(x)_{x_j}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad j, k \in N_{\leq m}.$$

Докажем, что для операторов $\mathbf{S}_j$ выполняется равенство (4).

При $x \in \mathbb{R}_{>}^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_j > 0, j \in N_{\leq m}\}$ имеем

$$(\varphi_k(x))'_{x_j} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\nu=1}^m \tau_j(i_1, i_2, \dots, i_\nu) P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} \frac{x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} \dots x_m^{\tau_m}}{x_j}. \quad (7)$$

Для каждого фиксированного $k \in N_{\leq m}$ определим на $\mathbb{R}^m$ непрерывную функцию $F_k(x) = \sum_{j=1}^m x_j \varphi_k^{(j)}(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Следовательно, в силу равенства (7) на $S_{>}^{m-1}$ получим

$$\begin{aligned} & x_1 \varphi_k^{(1)}(x) + x_2 \varphi_k^{(2)}(x) + \dots + x_m \varphi_k^{(m)}(x) = \\ &= \frac{1}{\nu} (x_1 \varphi_k'(x)_{x_1} + x_2 \varphi_k'(x)_{x_2} + \dots + x_m \varphi_k'(x)_{x_m}) = \\ &= \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^m \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\nu=1}^m \tau_j(i_1, i_2, \dots, i_\nu) P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} \dots x_m^{\tau_m} = \\ &= \frac{1}{\nu} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\nu=1}^m \sum_{j=1}^m \tau_j(i_1, i_2, \dots, i_\nu) P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} \dots x_m^{\tau_m} = \\ &= \frac{1}{\nu} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\nu=1}^m \nu P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\nu} = \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\nu=1}^m P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_\nu} = \varphi_k(x) \quad (x \in S_{>}^{m-1}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$F_k(x) = \varphi_k(x) \quad \forall x \in S_{>}^{m-1}, \quad k \in N_{\leq m}. \quad (8)$$

В силу непрерывности многопеременных функций $F_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ на компактном множестве S^{m-1} и из равенства (8) вытекает, что

$$F_k(x) = \varphi_k(x) \quad \forall x \in S^{m-1}, \quad k \in N_{\leq m}.$$

Следовательно, для операторов $\mathbf{S}_j$ (6) имеет место равенство (4).

Теперь покажем, что каждый оператор $\mathbf{S}_j$ (6) является стохастическим оператором. Очевидно, что $\mathbf{S}_j \geq \theta$, $j \in N_{\leq m}$. На $\mathbb{R}^m$ рассмотрим следующие суммы:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \varphi_k^{(j)}(x) &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\nu} \varphi_k'(x)_{x_j} = \frac{1}{\nu} \left(\sum_{k=1}^m \varphi_k(x) \right)'_{x_j} = \\ &= \frac{1}{\nu} ((x_1 + x_2 + \dots + x_m)^\nu)'_{x_j} = (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^{\nu-1}, \quad x \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Из последнего равенства на S^{m-1} получим

$$\sum_{k=1}^m \varphi_k^{(j)}(x) = 1, \quad j \in N_{\leq m}.$$

Это означает, что каждый оператор $\mathbf{S}_j$ является стохастическим. $\blacksquare$

Теорема 2. Если $\mathbf{S}_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $j \in N_{\leq m}$, – стохастические операторы, то оператор

$$\mathbf{S}(x) = x_1 \mathbf{S}_1(x) + x_2 \mathbf{S}_2(x) + \dots + x_m \mathbf{S}_m(x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad (9)$$

также является стохастическим.

Доказательство. Пусть каждый оператор $\mathbf{S}_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ имеет вид $\mathbf{S}_j(x) = (\psi_1^{(j)}(x), \psi_2^{(j)}(x), \dots, \psi_m^{(j)}(x))$, где $\psi_l^{(j)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Тогда из (9) для оператора $\mathbf{S} : x \rightarrow (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x))$ получим, что $\varphi_k(x) = x_1 \psi_k^{(1)}(x) + x_2 \psi_k^{(2)}(x) + \dots + x_m \psi_k^{(m)}(x)$, $k \in N_{\leq m}$. Из положительности операторов $\mathbf{S}_j$ следует, что $\mathbf{S} \geq \theta$. С другой стороны, в силу стохастичности операторов $\mathbf{S}_j$ для оператора $\mathbf{S}$ (9) при $x \in S^{m-1}$ имеем

$$\sum_{k=1}^m \varphi_k(x) = x_1 \sum_{k=1}^m \psi_k^{(1)}(x) + x_2 \sum_{k=1}^m \psi_k^{(2)}(x) + \dots + x_m \sum_{k=1}^m \psi_k^{(m)}(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1.$$

Из последнего равенства следует, что $\mathbf{S}$ – стохастический оператор. $\blacksquare$

Очевидно, что если в (9) $\mathbf{S}_j$ – линейные операторы, то оператор $\mathbf{S}$ является квадратичным стохастическим оператором; если в (9) $\mathbf{S}_j$ – квадратичные операторы, то оператор $\mathbf{S}$ является кубическим стохастическим оператором и т. д. Поэтому в дальнейшем запишем разложение (9) следующим образом:

$$\mathbf{S}^{[\nu]} = \mathbf{S}(\mathbf{S}_1^{[\nu-1]}, \mathbf{S}_2^{[\nu-1]}, \dots, \mathbf{S}_m^{[\nu-1]}), \quad \nu \geq 2.$$

3. Необходимое и достаточное условие бистохастичности операторов

Пусть $x \in S^{m-1}$ – произвольная фиксированная точка. Для разложения (4) введем следующие обозначения: $\mathbf{S}(x) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, $\mathbf{S}_j(x) = (a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, \dots, a_m^{(j)})$, $j \in N_{\leq m}$, где $a_k^{(j)} = \psi_k^{(j)}(x)$. Согласно обозначениям имеем $b_i = x_1 a_i^{(1)} + x_2 a_i^{(2)} + \dots + x_m a_i^{(m)}$, $i \in N_{\leq m}$.

Теорема 3. Если в разложении (4) каждый оператор $\mathbf{S}_j$ бистохастический, то оператор $\mathbf{S}$ также является бистохастическим.

Доказательство. Пусть $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_m$ – бистохастические операторы на S^{m-1} . Тогда в силу теоремы 2 оператор $\mathbf{S}$ (4) является стохастическим оператором.

Пусть $q \in N_{\leq m} \setminus \{m\}$ – произвольная фиксированная точка. Нам нужно показать, что $\sum_{i=1}^q b_{[i]} \leq \sum_{i=1}^q x_{[i]}$.

Для каждого $i \in N_{\leq m}$ существует такое $k_i \in N_{\leq m}$, что $b_{[i]} = \sum_{j=1}^m x_j a_{k_i}^{(j)}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^q b_{[i]} = x_1 \sum_{i=1}^q a_{k_i}^{(1)} + x_2 \sum_{i=1}^q a_{k_i}^{(2)} + \dots + x_m \sum_{i=1}^q a_{k_i}^{(m)}, \quad x \in S^{m-1}. \quad (10)$$

В силу бистochasticности операторов $\mathbf{S}_j$ имеем

$$\sum_{i=1}^q a_{[i]}^{(j)} \leq \sum_{i=1}^q x_{[i]}, \quad j \in N_{\leq m}.$$

Отсюда получим

$$x_j \sum_{i=1}^q a_{[i]}^{(j)} \leq x_j \sum_{i=1}^q x_{[i]}, \quad j \in N_{\leq m}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^m x_j \sum_{i=1}^q a_{[i]}^{(j)} \leq \sum_{j=1}^m x_j \sum_{i=1}^q x_{[i]}, \quad j \in N_{\leq m},$$

т. е.

$$x_1 \sum_{i=1}^q a_{[i]}^{(1)} + x_2 \sum_{i=1}^q a_{[i]}^{(2)} + \dots + x_m \sum_{i=1}^q a_{[i]}^{(m)} \leq \sum_{i=1}^q x_{[i]}.$$

Таким образом, отсюда и из (10) вытекает, что $\sum_{i=1}^q b_{[i]} \leq \sum_{i=1}^q x_{[i]}$. Последнее означает, что $\mathbf{S}$ – бистochasticский оператор. ■

Если существуют бистochasticские операторы $\mathbf{S}_j = \mathbf{B}_j^{[\nu-1]}$, $j \in N_{\leq m}$, и для бистochasticского оператора $\mathbf{S} = \mathbf{B}^{[\nu]}$ имеет место равенство (4), то будем писать

$$\mathbf{B}^{[\nu]} = \mathbf{S}(\mathbf{B}_1^{[\nu-1]}, \mathbf{B}_2^{[\nu-1]}, \dots, \mathbf{B}_m^{[\nu-1]}), \quad \nu \geq 2.$$

Теорема 4. Чтобы разложение (4) для бистochasticского оператора $\mathbf{S}$ было верно, необходимо, чтобы при любом $q \in N_{\leq m} \setminus \{m\}$ для каждого оператора $\mathbf{S}_j$, $j \in N_{\leq m}$, выполнялось неравенство

$$x_j \sum_{i=1}^q \mathbf{S}_j(x)_{[i]} \leq \sum_{i=1}^q x_{[i]}.$$

Доказательство. Предположим, что отображение $\mathbf{S} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ является бистochasticным и имеет место разложение (4). Пусть $x \in S^{m-1}$ – произвольная фиксированная точка. Для произвольного фиксированного $q \in N_{\leq m} \setminus \{m\}$ имеем $\sum_{i=1}^q b_{[i]} \leq \sum_{i=1}^q x_{[i]}$. Ясно, что $b_i = x_1 a_i^{(1)} + x_2 a_i^{(2)} + \dots + x_m a_i^{(m)}$, $i \in N_{\leq m}$.

Согласно определению перестановки элемента $x \in \mathbb{R}_+^m$ получим $b_{i_1} + b_{i_2} + \dots + b_{i_q} \leq b_{[1]} + b_{[2]} + \dots + b_{[q]} \quad \forall i_1, i_2, \dots, i_q \in N_{\leq m}$. Тогда

$$\sum_{j=1}^m x_j a_{i_1}^{(j)} + \sum_{j=1}^m x_j a_{i_2}^{(j)} + \dots + \sum_{j=1}^m x_j a_{i_q}^{(j)} \leq b_{[1]} + b_{[2]} + \dots + b_{[q]} \quad \forall i_1, i_2, \dots, i_q \in N_{\leq m},$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^m x_j (a_{i_1}^{(j)} + a_{i_2}^{(j)} + \dots + a_{i_q}^{(j)}) \leq b_{[1]} + b_{[2]} + \dots + b_{[q]} \quad \forall i_1, i_2, \dots, i_q \in N_{\leq m}.$$

Из определения бистокхастичности операторов вытекает, что

$$\sum_{j=1}^m x_j(a_{i_1}^{(j)} + a_{i_2}^{(j)} + \dots + a_{i_q}^{(j)}) \leq x_{[1]} + x_{[2]} + \dots + x_{[q]} \quad \forall i_1, i_2, \dots, i_q \in N_{\leq m}.$$

Отсюда при каждом $j \in N_{\leq m}$ имеем

$$x_j(a_{i_1}^{(j)} + a_{i_2}^{(j)} + \dots + a_{i_q}^{(j)}) \leq x_{[1]} + x_{[2]} + \dots + x_{[q]} \quad \forall i_1, i_2, \dots, i_q \in N_{\leq m}.$$

Следовательно,

$$x_j(a_{[1]}^{(j)} + a_{[2]}^{(j)} + \dots + a_{[q]}^{(j)}) \leq x_{[1]} + x_{[2]} + \dots + x_{[q]}, \quad j \in N_{\leq m},$$

т. е.

$$x_j \sum_{i=1}^q \mathbf{S}_j(x)_{[i]} \leq \sum_{i=1}^q x_{[i]}, \quad j \in N_{\leq m}. \quad \blacksquare$$

Замечание. Подчеркнем, что существуют стохастические операторы $\mathbf{S}_j$, $j \in N_{\leq m}$, не являющиеся бистокхастическими, для которых оператор $\mathbf{S}$ (4) является бистокхастическим. Эту ситуацию можно обосновать на примере.

Рассмотрим следующие линейные стохастические операторы в $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{S}_1^{[1]} : \begin{cases} x_1' = x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3, \\ x_2' = 0.5x_2, \\ x_3' = 0.5x_3, \end{cases} \quad \mathbf{S}_2^{[1]} : \begin{cases} x_1' = 0.5x_1, \\ x_2' = 0.5x_1 + x_2 + 0.5x_3, \\ x_3' = 0.5x_3, \end{cases}$$

$$\mathbf{S}_3^{[1]} : \begin{cases} x_1' = 0.5x_1, \\ x_2' = 0.5x_2, \\ x_3' = 0.5x_1 + 0.5x_2 + x_3. \end{cases}$$

Тогда для оператора $\mathbf{S}^{[2]}(x) = x_1\mathbf{S}_1^{[1]}(x) + x_2\mathbf{S}_2^{[1]}(x) + x_3\mathbf{S}_3^{[1]}(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, получим

$$\mathbf{S}^{[2]} : \begin{cases} x_1' = x_1(x_1 + x_2 + x_3), \\ x_2' = x_2(x_1 + x_2 + x_3), \\ x_3' = x_3(x_1 + x_2 + x_3). \end{cases}$$

Очевидно, что $\mathbf{S}^{[2]}(x)_{[i]} = x_{[i]} \quad \forall x \in S^2, i = \overline{1, 3}$, т. е. $\mathbf{S}^{[2]}(x) \prec x \quad \forall x \in S^2$. Следовательно, по определению 3 оператор $\mathbf{S}^{[2]}$ является бистокхастическим.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности // Учен. зап. науч.-исслед. каф. Укр. 1924. № 1. С. 83–115.
2. Улам С. Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964. 168 с.
3. Валландер С.С. О предельном поведении последовательности итераций некоторых квадратичных преобразований // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 3. С. 515–517.
4. Любич Ю.И. Математические структуры в популяционной генетике. Киев: Наук. думка, 1983. 296 с.

5. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры // Матем. сб. 1992. Т. 183, № 8. С. 119–140.
6. Ганиходжаев Р.Н. К определению квадратичных бистохастических операторов // УМН. 1993. Т. 48, № 4. С. 231–232.
7. Розиков У.А., Хамраев А.Ю. О кубических операторах, определенных в конечномерном симплексе // Укр. матем. журн. 2004. Т. 56, № 10. С. 1424–1433.
8. Шахиди Ф.А. О крайних точках множества бистохастических операторов // Матем. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 475–480.
9. Ganikhodzhaev R., Shahidi F. Doubly stochastic quadratic operators and Birkhoff's problem // Linear Algebra Appl. 2010. V. 432, No 1. P. 24–35.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.07.002>.
10. Шахиди Ф.А. О бистохастических операторах, определенных в конечномерном симплексе // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 463–468.
11. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983. 574 с.

Поступила в редакцию 28.05.2024

Принята к публикации 4.09.2024

Эшкабиров Юсуп Халбаевич, доктор физико-математических наук, профессор

Каршинский государственный университет

ул. Кучабег, д. 17, г. Карши, 180119, Республика Узбекистан

E-mail: yusup62@mail.ru

Истамов Жахонгир Зиёдиллаевич, старший преподаватель

Каршинский государственный университет

ул. Кучабег, д. 17, г. Карши, 180119, Республика Узбекистан

E-mail: jahongir.istamov97@mail.ru

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 651–659

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.651-659

Properties of Stochastic Operators of Order ν on a Finite-Dimensional Simplex

Yu.Kh. Eshkabilov, J.Z. Istamov***

Karshi State University, Karshi, 180119 Republic of Uzbekistan

E-mail: *yusup62@mail.ru, **jahongir.istamov97@mail.ru

Received May 28, 2024; Accepted September 4, 2024

Abstract

The necessary and sufficient conditions for stochasticity and bistochasticity of positive operators were analyzed. Key criteria for stochasticity of continuous positive operators in $\mathbb{R}^m$

were proved. The necessary and sufficient condition for these operators to be referred to as bistochastic was established.

Keywords: stochastic operator, bistochastic operator, cone, positive operator, rearrangements of cone element

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Bernstein S.N. Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity. *Ann. Math. Stat.*, 1942, vol. 13, no. 1, pp. 53–61.
2. Ulam S. *Nereshennye matematicheskie zadachi* [A Collection of Mathematical Problems]. Moscow, Nauka, 1964. 168 p. (In Russian)
3. Vallander S.S. On the limit behavior of iteration sequences of certain quadratic transformations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1972, vol. 202, no. 3, pp. 515–517. (In Russian)
4. Lyubich Yu.I. *Matematicheskie struktury v populyatsionnoi genetike* [Mathematical Structures in Population Genetics]. Kyiv, Naukova Dumka, 1983. 296 p. (In Russian)
5. Ganikhodzhaev R.N. Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions, and tournaments. *Sb.: Math.*, 1993, vol. 76, no. 2, pp. 489–506.
<https://doi.org/10.1070/SM1993v076n02ABEH003423>.
6. Ganikhodzhaev R.N. On the definition of bistochastic quadratic operators. *Russ. Math. Surv.*, 1993, vol. 48, no. 4, pp. 244–246.
<https://doi.org/10.1070/RM1993v048n04ABEH001058>.
7. Rozikov U.A., Khamraev A.Yu. On cubic operators defined on finite-dimensional simplexes. *Ukr. Math. J.*, 2004, vol. 56, no. 10, pp. 1699–1711.
<https://doi.org/10.1007/s11253-005-0145-3>.
8. Shahidi F. On the extreme points of the set of bistochastic operators. *Math. Notes*, 2008, vol. 84, no. 3, pp. 442–448. <https://doi.org/10.1134/S0001434608090150>.
9. Ganikhodzhaev R., Shahidi F. Doubly stochastic quadratic operators and Birkhoff's problem. *Linear Algebra Appl.*, 2010, vol. 432, no. 1, pp. 24–35.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.07.002>.
10. Shahidi F.A. On bistochastic operators defined on a finite-dimensional simplex. *Sib. Math. J.*, 2009, vol. 50, no. 2, pp. 368–372. <https://doi.org/10.1007/s11202-009-0042-3>.
11. Marshall A.W., Olkin I. *Neravenstva: teoriya mazhorizatsii i ee prilozheniya* [Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications]. Moscow, Mir, 1983. 574 p. (In Russian)

Для цитирования: Эшкабилов Ю.Х., Истамов Ж.З. О свойствах стохастических операторов порядка ν в конечномерном симплексе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 651–659.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.651-659>

For citation: Eshkabilov Yu.Kh., Istamov J.Z. Properties of stochastic operators of order ν on a finite-dimensional simplex. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 651–659.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.651-659>. (In Russian)