

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.685: 622.276

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.603-623

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ
ФИЛЬТРАЦИОННОЙ МОДЕЛИ НЕФТЯНОГО ПЛАСТА
ПО ЗАМЕРАМ ДАВЛЕНИЯ В СКВАЖИНАХ.
ЧАСТЬ 1: ОДНОРОДНЫЙ ПЛАСТ**

Д.И. Усманов¹, К.А. Поташев¹, Д.Р. Салимьянова^{1,2}

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

²Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»,
г. Москва, 123182, Россия

Аннотация

Рассмотрен способ отыскания коэффициента в граничных условиях третьего рода в задаче пьезопроводности в нефтяном пласте на его внешнем контуре. Такой контур, как правило, задают из соображений экономии вычислительных ресурсов, и он не обладает особыми гидродинамическими свойствами.

Идентификация коэффициента в граничных условиях выполнена с помощью интегральной балансовой модели взаимодействия залежи с внешней областью пласта. Для этого решена оптимизационная задача приближения среднего пластового давления к значениям, полученным по замерам давления в скважинах. Применимость этого алгоритма оценена при различных геометрии внешнего контура, расположении скважин и режимах их работы в предположении об однородности пласта. Проведена оценка устойчивости алгоритма решения обратной задачи к погрешности замеров давления.

Изложенный подход представляет собой быстрый и относительно простой в реализации алгоритм решения стоящей проблемы – определения граничных условий в фильтрационной модели пласта, обеспечивающий хорошее приближение его гидродинамического взаимодействия с законтурной областью. На практике названная проблема вызывает существенные затруднения при адаптации модели из-за значительной неопределенности исходных данных на удалении от области залежи, разбуренной скважинами.

Ключевые слова: нефтяной пласт, фильтрационная модель, уравнение пьезопроводности, граничное условие, интегральная балансовая модель, замер пластового давления, адаптация, оптимизация, устойчивость

Введение

При построении фильтрационных моделей нефтяного пласта боковую границу расчетной области, как правило, максимально приближают к внешнему контуру нефтеносности для сокращения вычислительных затрат при моделировании. Определение размера законтурной области при моделировании фильтрационного процесса является предметом отдельного исследования, так как обычно неизвестен радиус зоны пониженного давления, который может уточняться при воспроизведении динамики пластового давления [1]. Приближение границы к скважинам,

являющимися источниками возмущений в пласте, повышает сложность задания граничных условий в гидродинамической модели. В совокупности с низкой степенью изученности геологии контурной зоны из-за малого числа пробуренных в ней скважин максимальной степенью неопределенности при моделировании состояния нефтяных пластов обладает именно оценка водопритока через границы залежи [2–5].

При построении гидродинамической модели нефтяного резервуара наиболее трудоемким этапом является ее адаптация [6–11], состоящая в уточнении фильтрационно-емкостных свойств пласта, начальных и граничных условий для давления и насыщенности, продуктивности скважин. В условиях неопределенности перечисленных параметров процесс уточнения каждого из них предполагает выполнение многовариантных расчетов с целью минимизации их отклонения от реальных показателей. Очевидно, реализация такого подхода в полной постановке для всех искоемых параметров в общем случае оказывается невозможной в силу чрезмерно больших затрат машинного времени. Поэтому большое число проводимых сегодня исследований направлено на разработку специальных упрощенных быстродействующих методик уточнения отдельных параметров гидродинамической модели пласта.

Одним из наиболее экономичных в отношении вычислительных ресурсов и в то же время корректно оценивающих физические параметры системы является метод материального баланса. Методы, основанные на модели материального баланса, развивались в условиях ограниченных вычислительных ресурсов и позволили получить относительно простой, но в то же время полезный аппарат для оценок начальных запасов, выявления вклада различных движущих механизмов в пласте и количественной оценки взаимодействия разрабатываемой залежи с окружающими водоносными горизонтами (так называемыми «аквиферами», от англ. «aquifer») [2, 3, 12].

Методы материального баланса не потеряли своей значимости с дальнейшим ростом вычислительных ресурсов и развитием методов численного моделирования и стали применяться как дополнение к ним в качестве инструмента первичного анализа гидродинамического поведения залежи, а также получения информации о характеристиках пласта, которую невозможно получить путем численного моделирования [13–17].

Основным назначением методов материального баланса является уточнение величины начальных запасов углеводородов и характера движущих сил в пласте, в том числе при взаимодействии с примыкающими водоносными горизонтами или другими залежами. При этом основное внимание должно быть сосредоточено на корректном учете параметров водопритока, поскольку допущенные при этом ошибки могут значительно исказить основные показатели разработки, прогнозируемые моделью [16, 18–21]. Как правило, реализация метода материального баланса сводится к применению метода наименьших квадратов при анализе линейной регрессии между средним пластовым давлением и давлением, накопленным извлечением флюида из залежи. Подбираемые коэффициенты определяют начальные запасы углеводородов и интенсивность водопритока, для которой должна быть заранее задана некоторая приближенная функция, определяющая гидродинамическое поведение водоносного горизонта.

В качестве основных вариантов поведения аквифера используют модели Ван Эвердингена и Херста [22], Фетковича [23], а также Картера–Трейси [24]. Наибольшее распространение получили формулы постоянного, переменного водоносного горизонта и формулы Фетковича или Картера–Трейси [1]. Все названные

модели аквифера требуют обработки исторических данных по разработке пласта для оснащения их параметрами. Наиболее достоверной считается модель Ван Эвердингена и Херста, поскольку она опирается на аналитическое решение уравнения пьезопроводности в радиальном водоносном слое, однако требует дополнительных вычислительных затрат для численного интегрирования полученных выражений или использования аппроксимирующих их функций. Рассмотрены случаи неограниченного аквифера и ограниченного с условием изоляции или постоянного давления на внешней границе. Модель Фетковича основана на концепции коэффициента продуктивности – на предположении о пропорциональности между притоком с аквифера и разностью между средним давлением в нем и давлением на границе залежи. При этом среднее давление в аквифере не является постоянным. Поэтому модель состоит из двух уравнений: 1) для скорости притока, аналогичного условиям третьего рода; 2) линейной связи падения давления в аквифере с накопленным оттоком из него жидкости, что эквивалентно изолированному водоносному горизонту фиксированного объема в линейно-упругом режиме. Определению подлежат коэффициент продуктивности и емкость аквифера. Данной моделью можно приблизить неограниченный аквифер [25], что будет эквивалентно заданию граничных условий третьего рода с постоянными коэффициентами. Модель Картера – Трейси вводит в модель Ван Эвердингена и Херста дополнительное предположение о кусочно-постоянном значении притока воды через границу на каждом временном промежутке. Поведение со временем среднего давления в аквифере может быть описано с помощью той или иной аппроксимирующей функции [5, 26]. При этом параметры моделей аквифера заранее неизвестны и подбираются в ходе решения задач оптимизации из условий приближения модельных показателей разработки залежи к фактическим.

В настоящей работе изложена методика, позволяющая практически мгновенно идентифицировать коэффициент, определяющий запись граничных условий третьего рода в задаче расчета пластового давления, используя лишь замеры давления в скважинах и интегральные фильтрационно-емкостные свойства всей залежи [27]. Для этого использована балансовая модель, которая позволяет перейти при моделировании нестационарной фильтрации от трехмерной постановки к задаче нулевой размерности. Алгоритм сводится к решению обратной задачи отыскания коэффициента в граничном условии, обеспечивающем наилучшее воспроизведение динамики среднего пластового давления, оцененной по замерам давления в скважинах. Эквивалентность балансовой модели нулевой размерности пространственной модели достигается интегрированием в задаче для давления в исходной постановке с граничными условиями, содержащими искомые коэффициенты. В качестве постоянной величины давления в записи граничного условия использовано начальное давление в невозмущенном пласте. Переход от среднего давления в залежи к среднему давлению на ее границе выполнен с помощью аналитических оценок, учитывающих расстановку скважин. Вместо задания наименее изученных свойств аквифера и функции поведения его среднего давления изложенный метод опирается лишь на допущение о возможности описания гидродинамической связи залежи с водоносным горизонтом с помощью условия третьего рода с постоянными коэффициентами.

Работоспособность метода проверена при различных вариантах расположения скважин относительно границы залежи, ее формы и произвольной истории режимов работы скважин в предположении об однородности пласта. Все результаты получены в условиях, когда величина пластового давления выше и не достигает давления насыщения (разгазирования).

1. Постановка задачи

Рассмотрим область V нефтяного пласта, в которой выполним гидродинамическое моделирование процесса его разработки. Область V ограничена сверху и снизу кровлей и подошвой пласта, а сбоку – вертикальной цилиндрической поверхностью Γ . Направляющая поверхности Γ задается экспертным способом так, чтобы она, с одной стороны, была удалена от скважин как источников возмущений в пласте, полностью охватывая область извлекаемых запасов и все пробуренные скважины, а с другой стороны, минимизировала область V для сокращения вычислительных затрат при численном моделировании. Распределение порового давления $p(t, \mathbf{x})$ (Па) в области V описано уравнением пьезопроводности [28]

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in V. \quad (1)$$

Здесь t – время (с); $\mathbf{x}$ – вектор пространственных координат (м); $\beta = m\beta_f + \beta_r$ – упругоемкость (1/Па); m – пористость породы коллектора (д.ед.); β_f и β_r – коэффициенты объемного сжатия жидкости и упругости пласта (1/Па). Поверхности пробуренных скважин при записи уравнения (1) считаются внутренними границами области V . При необходимости учета используемой в практике гидродинамического моделирования нефтяных пластов так называемой «песчанистости» η (д.ед.), равной отношению объема породы коллектора, содержащего гидродинамически связанный объем флюида, к общему объему пласта, в уравнении (1) вместо параметра β используем величину $\eta\beta$.

Скорость фильтрации $\mathbf{u}$ (м/с) флюида, насыщающего пласт, подчиняется закону Дарси

$$\mathbf{u} = -\sigma \nabla p, \quad \sigma = k\varphi/\mu, \quad (2)$$

где k – абсолютная проницаемость пласта (м²), который в рамках настоящего исследования считается однородным; μ – динамическая вязкость пластового флюида (Па·с); φ – коэффициент подвижности пластового флюида.

В начальный момент времени давление во всем пласте равно невозмущенному давлению p_0 , которое будем считать постоянной величиной, пренебрегая гидростатической разницей давления на фоне его изменения при эксплуатации месторождения

$$t = 0, \quad \mathbf{x} \in V : \quad p = p_0. \quad (3)$$

Верхнюю и нижнюю границы залежи считаем непроницаемыми. На боковой границе Γ разрабатываемого пласта (залежи нефти) поставим граничное условие третьего рода для проекции скорости фильтрации u_n на внешнюю нормаль с использованием давления в невозмущенном пласте:

$$\mathbf{x} \in \Gamma : \quad u_n = -\sigma \frac{\partial p}{\partial n} = \alpha \frac{\sigma}{L} (p - p_0), \quad (4)$$

где L – некоторый характерный размер для области V (м); безразмерный параметр α отражает энергетическое взаимодействие (интенсивность потока) между разрабатываемой залежью V и ее законтурной областью V_a – внешним (водоносным) резервуаром (aquifer, «аквифер»), расположенным за внешним контуром нефтеносности [29].

При решении задачи фильтрации в расширенной области пласта $V_e = V \cup V_a$, содержащей законтурную область V_a (рис. 1), вместо граничного условия (4) используем условие первого рода с невозмущенным давлением p_0 на внешней границе Γ_e области V_e :

$$\mathbf{x} \in \Gamma_e : \quad p = p_0. \quad (5)$$

Заметим, что параметры σ, α зависят от величины суммарной подвижности φ флюида, которая определяется локальным фазовым насыщением коллектора. Однако в данной работе эту величину считаем неизменной. Таким образом, область применения излагаемого метода ограничивается начальным периодом разработки залежи, когда поле насыщенности не успевает значительно измениться, либо случаем, когда вязкости фаз имеют небольшие отличия, а их фазовые проницаемости близки к линейным.

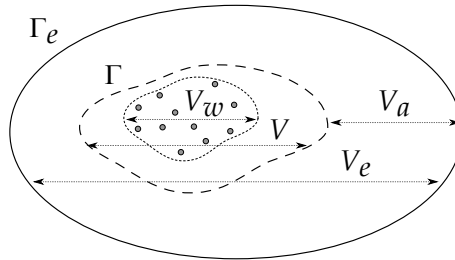


Рис. 1. Схема области залежи, разрабатываемой скважинами, и внешней законтурной области

Поскольку контур границы Γ задается условно, параметр α граничного условия (4) на этапе построения модели неизвестен. В общем случае для его определения необходимо решить обратную по отношению к (1)–(4) задачу минимизации отклонения модельных значений пластового давления от значений, измеряемых на скважинах в процессе разработки. Такая задача предполагает многократное решение прямой задачи (1)–(4) с подбором α . При этом любое уточнение фильтрационно-емкостных свойств пласта, которое неизбежно происходит на этапе адаптации модели, вообще говоря, требует перестроения решения этой обратной задачи. Поскольку размерность расчетной сетки фильтрационной модели в области V может достигать $10^6, \dots, 10^9$ узлов, то такой алгоритм не всегда является приемлемым из-за значительных вычислительных затрат.

Целью настоящей работы является получение быстрого, физически обоснованного способа отыскания единого для всей границы коэффициента α , обеспечивающего хорошее приближение задачи (1)–(3), (5) в расширенной до невозмущенной границы области V_e задачей (1)–(4) в области V , граница которой приближена к области нефтеносности. Полученное значение коэффициента α может использоваться как в качестве окончательного коэффициента в граничных условиях при дальнейшем численном гидродинамическом моделировании процесса разработки залежи, так и в качестве его первичной оценки для последующего локального уточнения.

Для получения быстрого алгоритма решения поставленной задачи использован метод материального баланса, предполагающий переход от исходной трехмерной задачи к задаче нулевой размерности. Все алгоритмы сформулированы в рамках предположений о наличии удаленного от залежи контура («контура питания») с невозмущенным давлением p_0 и об однородности пласта.

Перейдем к безразмерным переменным

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \frac{1}{L}, \quad \bar{t} = t \frac{\sigma^0}{\beta L^2}, \quad \bar{p} = \frac{p - p_0}{\Delta p}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \frac{L}{\sigma^0 \Delta p}, \quad (6)$$

где Δp – характерное понижение пластового давления в процессе разработки;

σ^0 – характерная проводимость пласта, которая в предположении его однородности всюду постоянна.

Опустив в дальнейшем для простоты верхнюю черту над безразмерными переменными, перепишем уравнения (1)–(5)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad (1')$$

$$\mathbf{u} = -\nabla p, \quad (2')$$

$$t = 0, \quad \mathbf{x} \in V : p = 0, \quad (3')$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma : u_n = -\frac{\partial p}{\partial n} = \alpha p, \quad (4')$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma_e : p = 0. \quad (5')$$

2. Балансовая модель, вспомогательные соотношения и метод решения

2.1. Уравнение материального баланса. Переход к балансовой модели, осредненной по всему объему залежи, осуществим интегрированием уравнения (1') по области V :

$$|V| \frac{dP}{dt} + \int_{\Gamma} u_n d\gamma = q(t), \quad (7)$$

$$P(t) = \frac{1}{|V|} \int_V p(t, \mathbf{x}) dV. \quad (8)$$

Здесь $|V|$ – объем области V ; $P(t)$ – среднее давление во всей залежи V в момент времени t ; $q(t)$ – суммарный мгновенный расход всех скважин в момент времени t .

Положив коэффициент α в условии (4') постоянным вдоль всей границы, перепишем второе слагаемое в левой части (7):

$$Q_{\Gamma}(t) = \int_{\Gamma} u_n d\gamma = \alpha \int_{\Gamma} p d\gamma = \alpha |\Gamma| p_{\Gamma}(t),$$

$$p_{\Gamma}(t) \equiv \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} p(t, \mathbf{x}) d\gamma.$$

Здесь $|\Gamma|$ – площадь боковой границы Γ залежи; p_{Γ} – среднее контурное давление, точнее, с учетом нормировки (6), отклонение среднего вдоль границы давления от начального пластового. Тогда уравнение (7) примет вид

$$|V| \frac{dP}{dt} + \alpha |\Gamma| p_{\Gamma}(t) = q(t). \quad (9)$$

Предположим, что отклонения от начального значения p_0 среднего давления в объеме залежи $P(t)$ и среднего давления на ее границе $p_{\Gamma}(t)$ пропорциональны друг другу с коэффициентом θ , определяемым лишь структурой залежи и схемой расстановки скважин:

$$p_{\Gamma}(t) = \theta P(t). \quad (10)$$

Тогда уравнение (9) можно переписать в форме, допускающей его разрешимость относительно среднего давления в залежи $P(t)$ с начальным условием согласно (3'):

$$t > 0: \quad |V| \frac{dP}{dt} + A|\Gamma|P(t) = q(t), \quad P(0) = 0, \quad A = \alpha\theta. \quad (11)$$

Следуя традиционному алгоритму метода материального баланса, нужно проинтегрировать уравнение (11) по времени от начального до произвольного момента t :

$$\frac{Q(t)}{P(t)} = |V| + \frac{A|\Gamma|}{P(t)} S(t), \quad Q(t) = \int_0^t q(\tau) d\tau, \quad S(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau.$$

Здесь $Q(t)$ – накопленная за время t разница отбора и закачки жидкости в пласт через скважины; P – среднее давление в залежи, соответствующее с учетом нормировки (6) величине расширения пластового флюида. Далее, совмещая фактическую и модельную прямые, можно подобрать две константы линейной зависимости $Q(S)$, определяющие начальный объем запасов нефти в залежи и константу потока с законтурной области [30]. Однако для этого необходимо заранее задать некоторое аналитическое или табулированное приближение функции $P(t)$ для вычисления интеграла $S(t)$, опираясь на частные представления о поведении законтурной области (аквифера). В алгоритме, излагаемом в настоящей работе, подобные приближения функции $P(t)$ заранее не вводятся. Вместо этого выполняется приближенный пересчет множества фактических замеров пластового давления в скважинах в среднее давление во всей залежи, опираясь на упрощенную схематизацию ее разработки скважинами.

2.2. Связь среднего давления в залежи и на ее внешней границе.

Сначала найдем способ вычисления коэффициента θ , устанавливающего соотношение (10). Общий вид связи коэффициента θ с параметрами моделируемой системы пласта и скважин получим в характерном частном случае, допускающем аналитическую запись решения.

Рассмотрим стационарную задачу радиальной фильтрации в области V_e , являющейся круговым цилиндром радиуса R . Внутри V_e расположена подобласть V_w , коаксиального с V_e кругового цилиндра радиуса $r_w \leq R$. Радиус r_w является эффективным радиусом кругового цилиндра, содержащего все пробуренные скважины (рис. 2). Область V_w будем называть «областью скважин». Область V гидродинамического моделирования залежи будем считать круговым цилиндром радиуса R_Γ , соосным к V_e и V_w . Граница области V , как правило, устанавливается на некотором расстоянии снаружи от области V_w для возможности задания более стабильных граничных условий за счет снижения возмущений от ближайших к границе действующих скважин и в то же время не достигающей внешней невозмущенной границы области V_e для сокращения вычислительных затрат.

В нормировке (6) в качестве характерного линейного масштаба L будем использовать радиус области V . Тогда $R_\Gamma = 1$, $r_w \leq 1$, $R > 1$.

На границе пласта выполняется условие (5')

$$r = R: p = 0.$$

На границе области скважин зададим условие первого рода

$$r = r_w: p = p_w,$$

где p_w – давление, среднее в V_w . Решение такой задачи известно [28]:

$$p(r) = p_w \frac{\ln(r/R)}{\ln(r_w/R)}, \quad r_w \leq r \leq R. \quad (12)$$

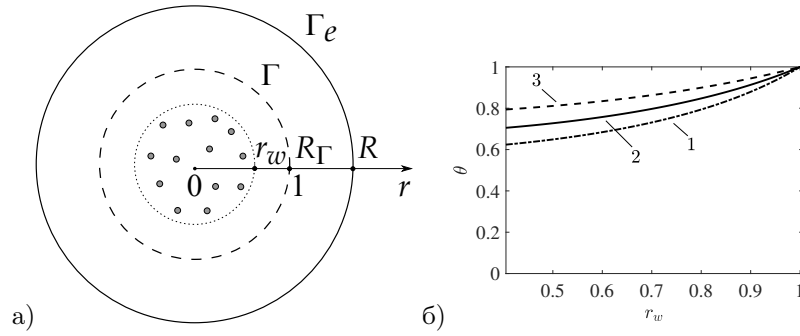


Рис. 2. а) Модельная схема расположения границ области скважин и залежи, б) отношение θ контурного давления к пластовому при $R = 2$ (1), $R = e$ (2), $R = 5$ (3)

Продолжим функцию (12) на отрезке $[0; r_w]$ средним значением p_w :

$$p(r) = \begin{cases} p_w, & 0 \leq r \leq r_w, \\ p_w \frac{\ln(r/R)}{\ln(r_w/R)}, & r_w \leq r \leq R. \end{cases} \quad (13)$$

Найдем из (13) выражения для P и p_Γ :

$$P = \frac{p_w (1 - r_w^2 + 2\ln R)}{2\ln(R/r_w)}, \quad p_\Gamma = p_w \frac{\ln R}{\ln(R/r_w)}. \quad (14)$$

Тогда множитель θ в (10) равен

$$\theta(R, r_w) = \frac{p_\Gamma}{P} = \frac{2\ln R}{1 - r_w^2 + 2\ln R}. \quad (15)$$

Зависимость $\theta(R, r_w)$ при фиксированных значениях R показана на рис. 2, б).

При равномерной сетке скважин радиус r_w области скважин V_w можно оценить из условия $\pi r_w^2 \approx N_w \pi r_{\min}^2$, откуда

$$r_w \approx r_{\min} \sqrt{N_w}, \quad (16)$$

где N_w – количество скважин, $r_{\min}$ – половина среднего расстояния между ближайшими скважинами.

2.3. Выражение среднего пластового давления через замеры в скважинах. Уравнение балансовой модели (11) решим относительно среднего давления P в залежи V . Для решения обратной к (11) задачи при определении коэффициента A необходимо сравнивать расчетные значения P с «фактическими». Поскольку непосредственно измерить среднее давление во всем пласте невозможно, то необходимо связать эту величину с показателями, допускающими наблюдение. С этой целью будем использовать замеры пластового давления в скважинах γ . Напомним, что под «пластовым давлением» в скважине понимается та величина давления, которая установилась бы в точке замера при условии длительного бездействия данной скважины, и поэтому измеряется после ее остановки [31]. В рамках настоящей работы будем считать, что на каждой скважине γ имеются

замеры пластового давления $p_\gamma(t_i)$ на каждый интересующий нас момент времени t_i ($i = 1, \dots, N_T$), что может быть достигнуто, например, аппроксимацией по замерам, ближайшим по времени.

Соотнесем с каждой скважиной γ некоторую близкую к ней область пласта V_γ так, что $\bigcup_{\gamma=1}^{N_w} V_\gamma = V_w$. Полагая, что в области V_γ пластовое давление близко к замеру p_γ , аналогично выражению (8) получим приближенное выражение среднего давления p_w в области скважин V_w через замеры давления в скважинах в каждый момент времени t_i :

$$p_w(t_i) \approx \frac{1}{|V_w|} \sum_{\gamma=1}^{N_w} p_\gamma(t_i) |V_\gamma|.$$

Положим, что как и при записи (16), сетку скважин можно считать равномерной, $|V_\gamma| \approx |V_w|/N_w$, и тогда

$$p_w(t_i) \approx \frac{1}{N_w} \sum_{\gamma=1}^{N_w} p_\gamma(t_i). \quad (17)$$

Связь искомой величины P с величиной p_w получим с помощью (14) и (15):

$$P = \frac{\lambda}{\theta} p_w, \quad \lambda(R, r_w) = \frac{\ln R}{\ln(R/r_w)}. \quad (18)$$

Подставив (17) в (18), найдем необходимое выражение среднего давления в залежи через замеры пластового давления в скважинах:

$$P(t_i) \approx P_i = \frac{\lambda}{\theta} \frac{1}{N_w} \sum_{\gamma=1}^{N_w} p_\gamma(t_i). \quad (19)$$

Далее величины P_i будем называть «замерами» среднего пластового давления.

2.4. Алгоритм идентификации коэффициента граничных условий.

Параметр A найдем из решения задачи минимизации уклонения расчетных величин от замеров среднего пластового давления в квадратичной метрике:

$$E(\tilde{A}) = \inf_A E^2(A), \quad E^2(A) = \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} (P(t_i; A) - P_i)^2, \quad (20)$$

где $P(t_i; A)$ – решение задачи (11) при некотором значении A в момент времени t_i .

Поскольку замеры пластового давления на скважинах не являются точными, а выражения, связывающие средние давления в разных областях пласта и замеры давления, являются приближенными, решение задачи (20) представляет собой метод подбора приближенного квазирешения $\tilde{A}$ [32]. С его помощью вычислим приближенное значение коэффициента в граничном условии (4')

$$\tilde{\alpha} = \tilde{A}/\theta. \quad (21)$$

Согласно практике гидродинамического моделирования нефтяных пластов предположим, что до решения задачи (20) уже известны все геометрические и фильтрационно-емкостные свойства пласта в области V , расположение и режимы работы скважин, а также замеры в них пластового давления.

Итоговый алгоритм определения коэффициента граничных условий (4') выглядит следующим образом:

1. По известным данным о характеристиках пласта и его разработки определим нормировочные величины (6) $L = R_\Gamma$, β , Δp , σ^0 и коэффициенты уравнения балансовой модели (11) $|V|$, $|\Gamma|$, $q(t)$.
2. По расстановке скважин с помощью (16) найдем радиус r_w .
3. Экспертным образом зададим радиус R контура питания и вычислим θ , λ по (15), (18).
4. Замеры давления в скважинах пересчитаем в P_i согласно (19) с подстановкой λ/θ .
5. Найдем коэффициент A из решения обратной задачи (20).
6. Коэффициент граничных условий $\tilde{\alpha}$ вычислим по формуле (21) с подстановкой θ .

Для решения одномерной задачи минимизации (20) достаточно применения метода золотого сечения – невязка 10^{-6} достигается всего за 10, ..., 30 итераций. На каждом итерационном шаге данного оптимизационного алгоритма задача Коши (11) решалась численно методом конечных разностей по явной схеме.

2.5. Замечания о радиусе внешнего контура питания. Отметим, что на практике расстояние R от центра области V_w , разбуренной скважинами, до контура невозмущенного давления неизвестно. Однако, принимая во внимание логарифмическое поведение давления вблизи скважин, нормированное расстояние $R \approx 3$, т.е. трехкратный размер залежи, можно считать бесконечно удаленным от разбуренной области, где давление будет близко к невозмущенному значению. Поэтому в дальнейшем будем дополнительно оценивать достоверность следующего приближения данной величины, позволяющего значительно упростить все используемые выражения

$$R \approx R_e = e. \quad (22)$$

В частности, выражения (15) и (18) для величин θ и λ примут вид

$$\theta_e(r_w) = \theta(R_e, r_w) = \frac{2}{3 - r_w^2}, \quad (23)$$

$$\lambda_e(r_w) = \lambda(R_e, r_w) = \frac{1}{1 - \ln r_w}. \quad (24)$$

Оценим величины искажения коэффициента α в граничных условиях и полученного с его помощью пластового давления при упрощенном способе (22) задания радиуса R . Величины, найденные при истинном значении R , будем называть «исходными», а вычисленные при приближенном значении R_e – «приближенными», обозначая их нижним индексом «e».

Согласно (19) с подстановкой (15), (18), (23) и (24) степень искажения замеров среднего пластового давления есть

$$\frac{P_{ie}}{P_i} = \frac{\lambda_e/\theta_e}{\lambda/\theta} = \frac{(3 - r_w^2) \ln(R/r_w)}{(1 - r_w^2 + 2 \ln R)(1 - \ln r_w)} \equiv \Pi. \quad (25)$$

Запишем входящие в (25) отношения исходных и приближенных коэффициентов θ, λ :

$$\Theta \equiv \frac{\theta_e}{\theta} = \frac{1 - r_w^2 + 2 \ln R}{(3 - r_w^2) \ln R}, \quad \Lambda \equiv \frac{\lambda_e}{\lambda} = \frac{\ln(R/r_w)}{\ln R (1 - \ln r_w)}, \quad \Pi = \frac{\Lambda}{\Theta}. \quad (26)$$

Найденный из решения задачи (20) коэффициент A_e будет соответствовать задаче (11) относительно давления, искаженного в Π раз, с тем же начальным условием:

$$t > 0 : |V| \frac{d(\Pi P)}{dt} + A_e |\Gamma| \Pi P(t) = q(t), \quad P(0) = 0. \quad (27)$$

Из отношения уравнений задач (27) и (11) получим

$$\frac{A_e \Pi}{A} = \frac{q(t) - |V| \Pi \dot{P}(t)}{q(t) - |V| \dot{P}(t)}, \quad \dot{P}(t) \equiv \frac{dP(t)}{dt}.$$

На временах, превышающих характерное время установления давления после изменения дебита скважин, производная давления по времени мала. Поэтому для месторождений, работающих преимущественно в квазистационарном режиме или в условиях медленно изменяющегося суммарного дебита скважин, получим оценку

$$A_e \approx A/\Pi. \quad (28)$$

Подставив (28) и (26) в (21), получим связь значений α_e и α :

$$\alpha_e \approx \alpha \frac{A_e \theta}{\theta_e A} = \alpha \frac{1}{\Pi \Theta} = \alpha \frac{1}{\Lambda}.$$

Теперь из анализа уравнения (9) следует оценка искажения расчетного среднего давления на границе, следовательно, и в пласте за счет приближения (22):

$$P_e/P \approx \Lambda.$$

На рис. 3 показаны зависимости отношений Π, Θ, Λ от величины R при различных отношениях радиуса r_w области скважин V_w к радиусу моделируемой залежи V . Область близости отношения Λ к единице свидетельствует о допустимости приближения (22) с точки зрения малой погрешности в расчете пластового давления. Согласно рис. 3, в) приближение (22) не приводит к погрешности более 5% в довольно широком интервале значений истинного радиуса контура питания R , причем этот интервал значительно расширяется с приближением границы области скважин V_w к границе моделируемой области V , когда $r_w \rightarrow 1$. Ниже эти оценки подтверждены на основе вычислительного эксперимента.

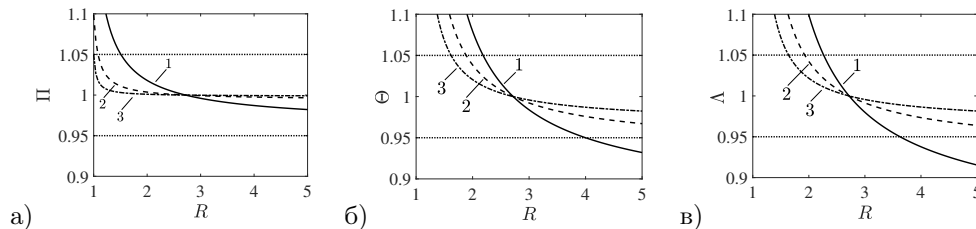


Рис. 3. Зависимость отношений Π, Θ, Λ от истинного радиуса контура питания при фиксированных значениях радиусах области скважин: 1) $r_w = 0.75$, 2) $r_w = 0.9$, 3) $r_w = 0.95$

3. Результаты и обсуждение

3.1. Алгоритм апробации. Первичная оценка достоверности разработанного алгоритма подбора коэффициента в граничных условиях, изложенного в п. 2.4, выполнялась с использованием так называемых «синтетических» (искусственно созданных) моделей пласта по следующему алгоритму:

1. Строим численное решение задачи (1')–(3'), (5') в расширенной до внешней невозмущенной границы области V_e в период времени $t \in (0, T)$, по результатам которого вычислим:
 - а) значения пластового давления $p_\gamma(t_i)$ в области каждой скважины γ , называемые в дальнейшем «замерами» в моменты t_i ,
 - б) «истинные» величины среднего давления $p_w(t_i)$ в области скважин V_w в моменты t_i .
2. По интегральным фильтрационно-емкостным и геометрическим параметрам пласта в области V и «замерам» пластового давления $p_\gamma(t_i)$ согласно алгоритму, описанному в разделе 2.5, найдем коэффициент $\tilde{\alpha}$.
3. Построим численное решение задачи (1')–(4') в ограниченной области V с коэффициентом $\tilde{\alpha}$ в граничных условиях (4'), по результатам вычислим:
 - а) приближенные значения среднего давления $\widetilde{p}_w(t_i)$ в области скважин V_w ,
 - б) погрешность модели (1')–(4') в области V_w по величине отклонения ε_p^2 :

$$\varepsilon_p^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (\widetilde{p}_w - p_w)^2 dt \approx \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} (\widetilde{p}_w(t_i) - p_w(t_i))^2. \quad (29)$$

Таким образом, допустимость приближения перетока через границу залежи граничным условием третьего рода (4') с постоянными коэффициентами будет оценена по точности воспроизведения динамики среднего пластового давления в области скважин, которое, как правило, и представляет основной интерес для прогноза энергетического состояния пласта и проектирования системы поддержания пластового давления.

Представленная оценка является первичной в той степени, в которой была выполнена идеализация модели пласта: а) пласт однородный и постоянной толщины; б) скважины вертикальные, совершенные по степени и характеру вскрытия пласта; в) удаленный контур питания Γ_e с фиксированным невозмущенным давлением – круговой радиуса R . При этом варьировались: а) форма контура Γ ограниченной гидродинамической модели пласта, б) расстановка скважин в этой области, в) режимы работы скважин (рис. 4). Кроме того, была исследована чувствительность алгоритма к погрешности замеров давления на скважинах. Таким образом, упрощение модели пласта касалось в основном второстепенных факторов, влияние которых и способы его сокращения на представленный алгоритм рассмотрены ниже.

3.2. Размер ограниченной модели и шаг сетки скважин. Влияние радиуса R_Γ ограниченной области V модели пласта на погрешность предложенного алгоритма оценивалось при двух фиксированных расстановках скважин со средним шагом $d = r_w/6$ (109 скважин) и $d = 5r_w/12$ (21 скважина). Во всех расчетах

были зафиксированы размерные величины радиусов r_w и $R = 5r_w$. Поэтому увеличение размерного радиуса R_Γ от r_w до R соответствует уменьшению нормированного радиуса $\bar{R} = R/R_\Gamma$; от 5 до 1 соответственно.

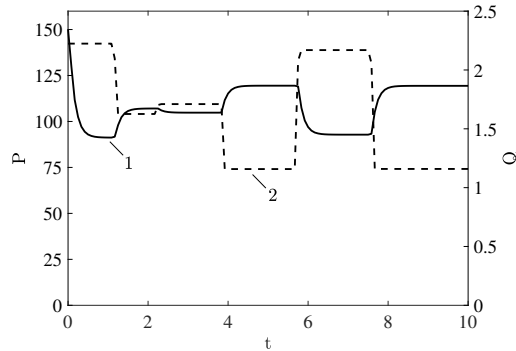


Рис. 4. Зависимость от времени t (годы) показателей разработки при переменных режимах работы скважин: 1 – среднее давление в залежи (атм); 2 – суммарный дебит скважин (тыс. м³/сут)

На рис. 5, а) показано сравнение погрешности вычисления среднего давления в обозначенных условиях при использовании исходного θ (15) и приближенного θ_e (23) коэффициентов. Применение приближения θ_e вместо коэффициента θ приводит к приросту погрешности вычислений до 6 % при удалении радиуса ограниченной модели от величины R/e в сторону R . При $R/R_\Gamma = e$ погрешности в обоих случаях, очевидно, совпадают. При уменьшении радиуса модели от R/e к r_w применение приближения θ_e снижает погрешность вычислений в среднем на 3 % по сравнению с использованием исходного коэффициента θ . Это демонстрирует возможность использования приближения θ_e , которое в отличие от θ снимает затруднения, связанные с заданием неизвестного на практике расстояния R до удаленного контура питания. При этом разумный выбор удаленности контура ограниченной модели от области скважин позволяет снизить суммарную погрешность вычислений до уровня всего 6–7 %. Поэтому во всех последующих оценках будет использоваться приближение θ_e , как имеющее наибольший интерес для практической реализации.

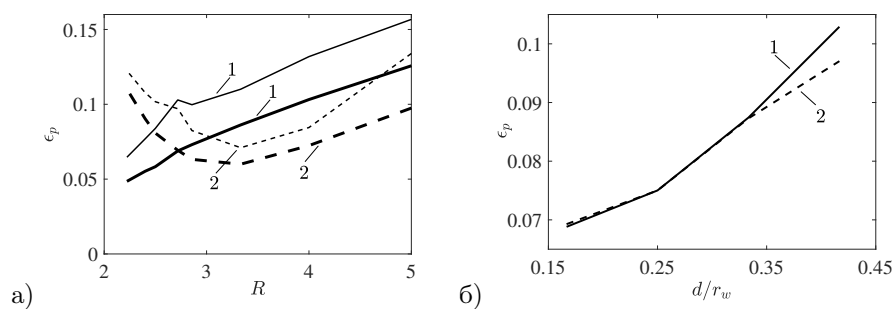


Рис. 5. Погрешность расчета среднего давления при исходном θ (1) и упрощенном θ_e (2) коэффициентах в зависимости от а) радиуса ограниченной модели: тонкая линия – $d = 5r_w/12$; утолщенная линия – $d = r_w/6$; б) среднего расстояния между скважинами

Как и следовало ожидать (рис. 5, а), б)), увеличение среднего расстояния между скважинами, имеющими в общем случае разные забойные давления, приводит к росту погрешности вычислений. Однако даже более чем двукратное увеличение среднего шага сетки скважин увеличивает эту погрешность в среднем лишь на 2–3 %. Во всех дальнейших оценках был использован вариант шага сетки скважин $d = r_w/6$, как более характерный в реальных условиях.

3.3. Форма контура ограниченной модели. Отдельный интерес представляет применимость изложенного алгоритма, основанного на предположении о круговой концентрической форме границы Γ модельной области V , в условиях, когда это допущение нарушается. С этой целью были рассмотрены два варианта искажения границы Γ : 1) ее замена на правильный многоугольник с N гранями с сохранением положения центра; 2) ее замена на эллиптический контур, в одном из фокусов которого находится центр области скважин V_w (рис. 6). В обоих вариантах площадь залежи фиксирована и равна $S = \pi(R/e)^2$.

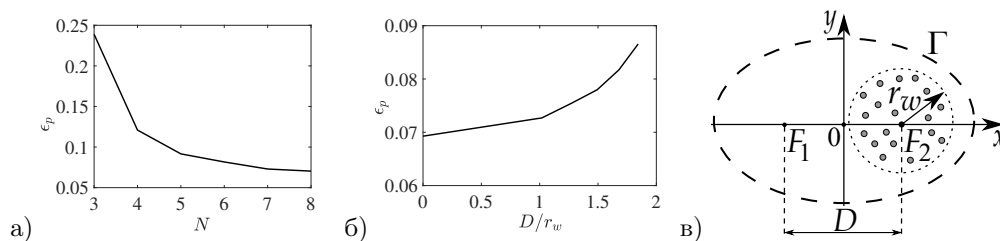


Рис. 6. Зависимость погрешности от формы контура ограниченной модели: а) в виде правильного многоугольника, б) в виде эллипса; в) схема расположения эллиптической границы и области скважин

Уже для квадратной формы области V , когда $N = 4$, погрешность вычислений приближается к уровню 10 % и снижается до ранее указанного уровня 6–7 %, начиная с числа граней $N = 6$. Для варианта эллиптической формы контура Γ варьировалось расстояние $D = F_1F_2$ между фокусами (рис. 6, в)). Нулевое расстояние $D = 0$ соответствует окружности, концентрической с областью V_w , когда погрешность не превосходит 7 %, а при удалении фокусов друг от друга на расстояние до двукратного радиуса области V_w не приводит к превышению погрешности до уровня 9 % (рис. 6, б)). Полученные результаты свидетельствуют о применимости предложенного алгоритма при значительной вариации форм границы моделируемой залежи и расположения в ней области скважин.

3.4. Чувствительность алгоритма к погрешности замеров давления.

Как было сказано ранее, в настоящей работе метод подбора приближенного квази-решения применялся в том числе из-за наличия некоторой погрешности замеров пластового давления в скважинах. В связи с этим для оценки применимости алгоритма решения оптимизационной задачи (20) необходимо было исследовать его устойчивость и чувствительность по отношению к отклонениям замеров давления от истинных величин. Для этого вместо «точных» значений $p_\gamma(t_i)$ в момент замера t_i в (19) были использованы их зашумленные значения

$$\bar{p}_\gamma(t_i) = p_\gamma(t_i)(1 + \varepsilon_{\gamma i}), \quad i = 1, \dots, N_T, \quad (30)$$

где $\varepsilon_{\gamma i}$ – случайные величины с нормальным законом распределения $N(0, \sigma^2)$; $\sigma \in [0, 1]$ – уровень шума. Согласно правилу трех сигм величина 2σ определяет

интервал, в который попадает генерируемый шум с вероятностью 95.45 %. Были рассмотрены варианты $\sigma = 0.01, 0.1$ и наиболее интересные для практических задач периоды τ замеров давления, соответствующие размерным величинам 1, 3 и 6 месяцев. При фиксации параметров σ и τ генерировались по 1000 реализаций наборов независимых случайных величин $\varepsilon_{\gamma i}$. Для каждой реализации строилось решение оптимизационной задачи (20) с подстановкой в (19) зашумленных значений (30) и рассчитывалась погрешность ε_p по (29) с подстановкой в (17) истинных замеров давления без зашумления. Анализировалась функция плотности распределения случайной величины ε_p при фиксированных (σ, τ) .

Поскольку зависимость погрешности вычисления среднего давления по предложенному алгоритму от величины ошибки замеров ограничена (рис. 7), то можно утверждать, что предложенный алгоритм устойчив по отношению к данному фактору. Даже при шуме в замерах давления на уровне 10 % погрешность расчета динамики среднего давления в пласте не отклоняется более чем на 2 % от исходной величины. При уровне шума в 1 % такое отклонение становится вообще незначительным. Кроме того, сокращение периода замеров давления и, следовательно, увеличение их общего количества способно кратно понизить дисперсию ошибки вычисления динамики среднего пластового давления.

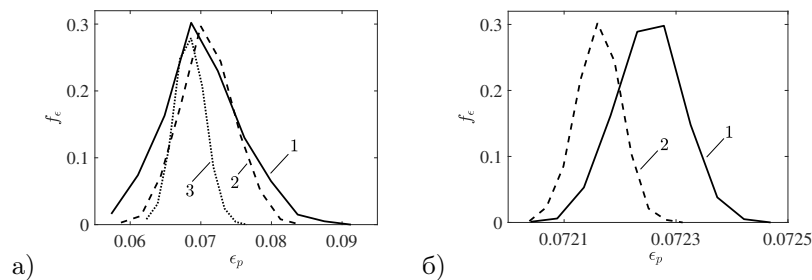


Рис. 7. Распределение погрешности вычисления среднего пластового давления по реализациям зашумления замеров давления в скважинах: а) $\sigma = 0.1$, б) $\sigma = 0.01$; кривые 1, 2, 3 – период замеров $\tau = 6, 3, 1$ мес. соответственно

Заключение

Предложена методика быстрого подбора коэффициента в граничных условиях задачи расчета давления в фильтрационной модели нефтяного пласта. Методика основана на использовании балансовой модели нулевой размерности и поэтому не требует решения нестационарных задач фильтрации в пространственной постановке. Это на порядки сокращает машинное время решения задачи идентификации коэффициента в граничных условиях. Время работы алгоритма составляет несколько секунд, что в принципе несопоставимо с затрачиваемым машинным временем подбора коэффициента путем многократного численного моделирования нестационарной фильтрации в исходной трехмерной постановке. Рассмотрен вариант граничных условий третьего рода с постоянными коэффициентами. В этом случае в качестве входных данных достаточно задать средние фильтрационно-емкостные свойства пласта, шаг сетки скважин, историю их дебитов и замеров пластового давления. Для реализации алгоритма нет необходимости задания геометрии и фильтрационных параметров внешнего контура залежи, который, как правило, выбирается из соображений экономии вычислительных ресурсов и не об-

ладает особыми гидродинамическими свойствами. В рамках допущений об однородности пласта и однородности граничных условий показана достаточно высокая точность предложенного упрощенного подхода при вариации схем расположения скважин, режимов их работы и геометрии границы залежи. В широком диапазоне параметров моделируемой системы погрешность расчета среднего пластового давления по пространственной модели с найденным коэффициентом граничных условий не превосходит 6–9 %. Показана устойчивость предложенного алгоритма к погрешности замеров пластового давления в скважинах. Получены оценки степени снижения чувствительности алгоритма к случайным ошибкам измерения давления при увеличении частоты замеров.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030») и при финансовой поддержке НИЦ «Курчатовский институт» в рамках государственного задания FNEF-2024-0016.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. РД 153-39.0-047-00. Регламент по созданию постоянно действующих геологотехнологических моделей нефтяных и газонефтяных месторождений. М.: Минтопэнерго, 2000. 130 с.
2. *Pirson S.J.* Oil Reservoir Engineering. New York, NY: McGraw-Hill, 1958. 735 p.
3. *Craft B.C., Hawkins M.F.* Applied Petroleum Reservoir Engineering / Terry R.E. (Rev.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991. 431 p.
4. *Dake L.P.* The Practice of Reservoir Engineering. Ser.: Developments in Petroleum Science. V. 36. Elsevier Sci., 2001. 572 p.
5. *Omeke J.E., Nwachukwu A., Awo R.O., Boniface O., Uche I.N.* A new approach to aquifer influx calculation for finite aquifer system // Proc. SPE Nigeria Annu. Int. Conf. Exhib. (Abuja, Nigeria, July 2011). Art. SPE-150733-MS. Abuja, 2011. <https://doi.org/10.2118/150733-MS>.
6. *Ahmed T.H.* Reservoir Engineering Handbook. Houston, TX: Gulf Publ., 2000. xiv, 863 p.
7. *Aziz K., Settari A.* Petroleum Reservoir Simulation. London: Appl. Sci. Publ., 1979. P. 135–139.
8. *Gilman J.R., Ozgen C.* Reservoir Simulation: History Matching and Forecasting. Richardson, TX: Soc. Pet. Eng., 2013. 120 p. <https://doi.org/10.2118/9781613992920>.
9. *Mohaghegh S.D.* Data-Driven Reservoir Modeling. Richardson, TX: Soc. Pet. Eng., 2017. <https://doi.org/10.2118/9781613995600>. 166 p.
10. *Dake L.P.* Fundamentals of Reservoir Engineering. Ser.: Developments in Petroleum Science. V. 8. Elsevier, 1983. 462 p.
11. *Towler B.F.* Fundamental Principles of Reservoir Engineering. Ser.: SPE Textbook Series. V. 8. Richardson, TX: Soc. Pet. Eng., 2002. 232 p.
12. *Muskat M.* Physical Principles of Oil Production. Ser.: International Series in Pure and Applied Physics. New York, NY: McGraw-Hill Book Co., 1949. P. 406–411.
13. *Farough A.S.M., Nielsen R.F.* The material balance approach vs reservoir simulation as an aid to understanding reservoir mechanics // Proc. Fall Meet. of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Houston, Texas, October 1970. Soc. Pet. Eng., 1970. Art. SPE-3080-MS. <https://doi.org/10.2118/3080-MS>.

14. *Levine J.S., Prats M.* The calculated performance of solution-gas-drive reservoirs // SPE J. 1961. V. 1, No 3. Art. SPE-1520-G. P. 142–152. <https://doi.org/10.2118/1520-G>.
15. *Pletcher J.L.* Improvements to reservoir material-balance methods // SPE Reservoir Eval. Eng. 2002. V. 5, No 1. Art. SPE-75354-PA. P. 49–59. <https://doi.org/10.2118/75354-PA>.
16. *Esor E., Dresda S., Monico C.* Use of material balance to enhance 3D reservoir simulation: A case study // Proc. SPE Annu. Tech. Conf. Exhib., Houston, Texas, September 2004. SPE, 2004. Art. SPE-90362-MS. <https://doi.org/10.2118/90362-MS>.
17. MBAL: Analytical Reservoir Engineering Toolkit. Petroleum Engineering Software, IPM Suite, Petex, PE Limited, 2024.
18. *Robinson M.P.* Pressure interference correction to the material balance equation for water-drive reservoirs using a digital computer // Trans. AIME. 1958. V. 213, No 1. Art. SPE-1006-G. P. 418–422. <https://doi.org/10.2118/1006-G>.
19. *Irby T.L., Zurawsky L.G., Clapham E.E.* Material-balance analysis of a water-drive reservoir with an unusual development history // J. Pet. Technol. 1962. V. 14, No 1. Art. SPE-70-PA. P. 37–42. <https://doi.org/10.2118/70-PA>.
20. *Sills S.R.* Improved material-balance regression analysis for waterdrive oil and gas reservoirs // SPE Reservoir Eng. 1996. V. 11, No. 2. Art. SPE-28630-PA. P. 127–134. <https://doi.org/10.2118/28630-PA>.
21. *Yildiz T., Khosravi A.* An analytical bottomwaterdrive aquifer model for material-balance analysis // SPE Reservoir Eval. Eng. 2007. V. 10, No 6. Art. PE-103283-PA. P. 618–628. <https://doi.org/10.2118/103283-PA>.
22. *Van Everdingen A.F., Hurst W.* The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs // J. Pet. Technol. 1949. V. 1, No 12. Art. SPE-949305-G. P. 305–324. <https://doi.org/10.2118/949305-G>.
23. *Fetkovich M.J.* A simplified approach to water influx calculations-finite aquifer systems // J. Pet. Technol. 1971. V. 23, No 7. Art. SPE-2603-PA. P. 814–828. <https://doi.org/10.2118/2603-PA>.
24. *Carter R.D., Tracy G.W.* An improved method for calculating water influx // Trans. AIME. 1960. V. 219, No 1. Art. SPE-1626-G. P. 415–417. <https://doi.org/10.2118/1626-G>.
25. *Lee J., Wattenbarger R.* Gas Reservoir Engineering. Ser.: SPE Textbook Ser. V. 5. Richardson, TX: Soc. Pet. Eng., 1996. 349 p.
26. *Edwardson M.L., Girner H.M., Parkinson H.R., Williams C.D., Matthews C.S.* Calculation of formation temperature disturbances caused by mud circulation // J. Pet. Technol. 1962. V. 14. No 4. Art. SPE-124-PA. P. 416–426. <https://doi.org/10.2118/124-PA>.
27. *Usmanov D., Potashev K., Filatov E., Ganiev R.* Identification of the boundary conditions of the reservoir hydrodynamic model by reservoir pressure measurements in wells // AIP Conf. Proc. 2024. V. 3119. No 1. Art. 040006. <https://doi.org/10.1063/5.0214869>.
28. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 212 с.
29. *Мазо А.Б., Поташев К.А.* Моделирование разработки нефтяного пласта методом суперэлементов с локальной детализацией решения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2017. Т. 159, № 3. С. 327–339.
30. *Havlena D., Odeh A.S.* The material balance as an equation of a straight line // J. Pet. Technol. 1963. V. 15, No 8. P. 896–900. <https://doi.org/10.2118/559-PA>.
31. *Kamal M.M.* Transient Well Testing. SPE Monogr. V. 23. Ser.: Henry L. Doherty Series. Richardson, TX: Soc. Pet. Eng., 2009. 850 p. <https://doi.org/10.2118/9781555631413>.
32. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.

Поступила в редакцию 12.08.2024

Принята к публикации 5.11.2024

Усманов Дамир Ильнурович, магистрант, лаборант-исследователь Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *damirusm01@gmail.com*

Поташев Константин Андреевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой аэрогидромеханики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *KPotashev@mail.ru*

Салимьянова Дилара Радиковна, магистрант Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, младший научный сотрудник

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»

ул. Академика Курчатова, д. 1, г. Москва, 123182, Россия

E-mail: *DiRSalimyanova@stud.kpfu.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 603–623

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.603-623

**Identifying Boundary Conditions of an Oil Reservoir Flow Model
from Well Pressure Measurements. Part 1: Homogeneous Reservoir**

D.I. Usmanov^{a}, K.A. Potashev^{a**}, D.R. Salimyanova^{a,b***}*

^a*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

^b*National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, 123182 Russia*

E-mail: ^{*}*damirusm01@gmail.com*, ^{**}*KPotashev@mail.ru*, ^{***}*DiRSalimyanova@stud.kpfu.ru*

Received August 12, 2024; Accepted November 5, 2024

Abstract

A method was outlined for determining the coefficient of third-kind boundary conditions of the piezoconductivity problem in an oil reservoir, particularly on its external contour, which has, as a rule, no specific hydrodynamic properties and is set to reduce computational costs. The coefficient was determined using an integral balance model of an interaction between the oil deposit and the outer region of the reservoir. The optimization problem of approximating the average reservoir pressure to the values obtained from the well pressure measurements was solved. Assuming the homogeneity of the reservoir, the applicability of the algorithm was assessed under various geometries of the external contour, well placements, and operating

conditions. The stability of the algorithm for solving the inverse problem was analyzed against pressure measurement errors. The proposed approach offers a relatively simple algorithm for defining the boundary conditions of a reservoir flow model, which enables a good approximation of the hydrodynamic interaction of the reservoir with its outer region. However, due to uncertainties in the initial data for regions distant from the well-drilled area of the reservoir, significant difficulties remain in calibrating the model.

Keywords: oil reservoir, flow model, piezoconductivity equation, boundary condition, integral balance model, reservoir pressure measurement, adaptation, optimization, stability

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030) and performed as part of state assignment no. FNEF-2024-0016 to the National Research Centre “Kurchatov Institute.”

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Schematic layout of the well-drilled area and the outer region of the reservoir.

Fig. 2. a) Model layout of the well and deposit boundaries, b) θ ratio of the contour pressure to the reservoir pressure for $R = 2$ (1), $R = e$ (2), $R = 5$ (3).

Fig. 3. Dependence of Π , Θ , Λ on the actual external contour radius for fixed well radius values: 1) $r_w = 0.75$, 2) $r_w = 0.9$, 3) $r_w = 0.95$.

Fig. 4. Dependence of the development parameters on time t (years) under various well operating conditions: 1 – average deposit pressure (atm); 2 – total well flow rate (thousand m^3/day).

Fig. 5. Errors in calculating the average pressure from the original θ (1) and simplified θ_e (2) coefficients depending on a) the radius of the limited model: thin line – $d = 5r_w/12$; thick line – $d = r_w/6$; b) the average distance between the wells.

Fig. 6. Dependence of errors on the contour shape of the limited model: a) as a regular polygon; b) as an ellipse; c) schematic representation of the elliptical boundary and well area.

Fig. 7. Distribution of errors in calculating the average reservoir pressure considering the pressure measurement noise in the wells: a) $\sigma = 0.1$, b) $\sigma = 0.01$; curves 1, 2, 3 correspond to the measurement intervals of $\tau = 6, 3, 1$ months, respectively.

References

1. Guidance Document 153-39.0-047-00. Guidelines for developing continuous geotechnological models of oil and oil-gas fields. Moscow, Mintopenergo, 2000. 130 p. (In Russian)
2. Pirson S.J. *Oil Reservoir Engineering*. New York, NY, McGraw-Hill, 1958. 735 p.
3. Craft B.C., Hawkins M.F. *Applied Petroleum Reservoir Engineering*. Terry R.E. (Rev.). Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall, 1991. 431 p.
4. Dake L.P. *The Practice of Reservoir Engineering*. Ser.: Developments in Petroleum Science. Vol. 36. Elsevier Sci., 2001. 572 p.
5. Omeke J.E., Nwachukwu A., Awo R.O., Boniface O., Uche I.N. A new approach to aquifer influx calculation for finite aquifer system. *Proc. SPE Nigeria Annu. Int. Conf. Exhib. (Abuja, Nigeria, July 2011)*. Art. SPE-150733-MS. Abuja, 2011. <https://doi.org/10.2118/150733-MS>.
6. Ahmed T.H. *Reservoir Engineering Handbook*. Houston, TX, Gulf Publ., 2000. xiv, 863 p.
7. Aziz K., Settari A. *Petroleum Reservoir Simulation*. London, Appl. Sci. Publ., 1979. P. 135–139.
8. Gilman J.R., Ozgen C. *Reservoir Simulation: History Matching and Forecasting*. Richardson, TX, Soc. Pet. Eng., 2013. 120 p. <https://doi.org/10.2118/9781613992920>.

9. Mohaghegh S.D. *Data-Driven Reservoir Modeling*. Richardson, TX, Soc. Pet. Eng., 2017. <https://doi.org/10.2118/9781613995600>. 166 p.
10. Dake L.P. *Fundamentals of Reservoir Engineering*. Ser.: Developments in Petroleum Science. Vol. 8. Elsevier, 1983. 462 p.
11. Towler B.F. *Fundamental Principles of Reservoir Engineering*. Ser.: SPE Textbook Series. Vol. 8. Richardson, TX: Soc. Pet. Eng., 2002. 232 p.
12. Muskat M. *Physical Principles of Oil Production*. Ser.: International Series in Pure and Applied Physics. New York, NY, McGraw-Hill Book Co., 1949, pp. 406–411.
13. Farough A.S.M., Nielsen R.F. The material balance approach vs reservoir simulation as an aid to understanding reservoir mechanics. *Proc. Fall Meet. of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Houston, Texas, October 1970*. Soc. Pet. Eng., 1970, art. SPE-3080-MS. <https://doi.org/10.2118/3080-MS>.
14. Levine J.S., Prats M. The calculated performance of solution-gas-drive reservoirs. *SPE J.*, 1961, vol. 1, no. 3, art. SPE-1520-G, pp. 142–152. <https://doi.org/10.2118/1520-G>.
15. Pletcher J.L. Improvements to reservoir material-balance methods. *SPE Reservoir Eval. Eng.*, 2002, vol. 5, no. 1, art. SPE-75354-PA, pp. 49–59. <https://doi.org/10.2118/75354-PA>.
16. Esor E., Dresda S., Monico C. Use of material balance to enhance 3D reservoir simulation: A case study. *Proc. SPE Annu. Tech. Conf. Exhib., Houston, Texas, September 2004*. SPE, 2004, art. SPE-90362-MS. <https://doi.org/10.2118/90362-MS>.
17. MBAL: Analytical Reservoir Engineering Toolkit. Petroleum Engineering Software, IPM Suite, Petex, PE Limited, 2024.
18. Robinson M.P. Pressure interference correction to the material balance equation for water-drive reservoirs using a digital computer. *Trans. AIME*, 1958, vol. 213, no. 1, art. SPE-1006-G, pp. 418–422. <https://doi.org/10.2118/1006-G>.
19. Irby T.L., Zurawsky L.G., Clapham E.E. Material-balance analysis of a water-drive reservoir with an unusual development history. *J. Pet. Technol.*, 1962, vol. 14, no. 1, art. SPE-70-PA, pp. 37–42. <https://doi.org/10.2118/70-PA>.
20. Sills S.R. Improved material-balance regression analysis for waterdrive oil and gas reservoirs. *SPE Reservoir Eng.*, 1996, vol. 11, no. 2, art. SPE-28630-PA, pp. 127–134. <https://doi.org/10.2118/28630-PA>.
21. Yildiz T., Khosravi A. An analytical bottomwaterdrive aquifer model for material-balance analysis. *SPE Reservoir Eval. Eng.*, 2007, vol. 10, no. 6, art. PE-103283-PA, pp. 618–628. <https://doi.org/10.2118/103283-PA>.
22. Van Everdingen A.F., Hurst W. The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs. *J. Pet. Technol.*, 1949, vol. 1, no. 12, art. SPE-949305-G, pp. 305–324. <https://doi.org/10.2118/949305-G>.
23. Fetkovich M.J. A simplified approach to water influx calculations-finite aquifer systems. *J. Pet. Technol.*, 1971, vol. 23, no. 7, art. SPE-2603-PA, pp. 814–828. <https://doi.org/10.2118/2603-PA>.
24. Carter R.D., Tracy G.W. An improved method for calculating water influx. *Trans. AIME*, 1960, vol. 219, no. 1, art. SPE-1626-G, pp. 415–417. <https://doi.org/10.2118/1626-G>.
25. Lee J., Wattenbarger R. *Gas Reservoir Engineering*. Ser.: SPE Textbook Ser. Vol. 5. Richardson, TX, Soc. Pet. Eng., 1996. 349 p.
26. Edwardson M.L., Girner H.M., Parkinson H.R., Williams C.D., Matthews C.S. Calculation of formation temperature disturbances caused by mud circulation. *J. Pet. Technol.*, 1962, vol. 14, no. 4, art. SPE-124-PA, pp. 416–426. <https://doi.org/10.2118/124-PA>.
27. Usmanov D., Potashev K., Filatov E., Ganiev R. Identification of the boundary conditions of the reservoir hydrodynamic model by reservoir pressure measurements in wells. *AIP Conf. Proc.*, 2024, vol. 3119, no. 1, art. 040006. <https://doi.org/10.1063/5.0214869>.

-
28. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Dvizhenie zhidkosti i gazov v prirodnykh plastakh* [Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks]. Moscow, Nedra, 1984. 212 p. (In Russian)
 29. Mazo A.B., Potashev K.A. Petroleum reservoir simulation using super-element method with local detalization of the solution. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 3, pp. 327–339. (In Russian)
 30. Havlena D., Odeh A.S. The material balance as an equation of a straight line. *J. Pet. Technol.*, 1963, vol. 15, no. 8, pp. 896–900. <https://doi.org/10.2118/559-PA>.
 31. Kamal M.M. (Ed.) Transient Well Testing. SPE Monogr. Vol. 23. Ser.: Henry L. Doherty Series. Richardson, TX, Soc. Pet. Eng., 2009. 850 p. <https://doi.org/10.2118/9781555631413>.
 32. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Solutions of Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1986. 288 p. (In Russian)
-

Для цитирования: Усманов Д.И., Поташев К.А., Салимьянова Д.Р. Идентификация граничных условий фильтрационной модели нефтяного пласта по замерам давления в скважинах. Часть 1: Однородный пласт // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 603–623. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.603-623>.

For citation: Usmanov D.I., Potashev K.A., Salimyanova D.R. Identifying boundary conditions of an oil reservoir flow model from well pressure measurements. Part 1: Homogeneous reservoir. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 603–623. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.603-623>. (In Russian)