

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.374

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.566-579

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДИСКЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Е.А. Лямина¹, Н.В. Каленова²

¹*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлinskого РАН, г. Москва, 119526, Россия*

²*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),
г. Москва, 125993, Россия*

Аннотация

Построено общее решение для распределения напряжений в тонком диске гиперболического профиля под действием внешнего и внутреннего давлений, находящемся в установившемся температурном поле, в условиях плосконапряженного состояния. Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука. В пластической области действует условие пластичности Мизеса. Краевая задача является статически определимой. Поэтому для определения поля напряжений не требуется учет пластического течения. Общее решение применено для расчета напряжений в диске, нагруженном внешним давлением и температурным полем. Показано влияние параметра, характеризующего профиль диска, и величины внешнего давления на развитие пластической области и распределение напряжений.

Ключевые слова: диск гиперболического профиля, плосконапряженное состояние, условие Мизеса, термомеханическое нагружение, анализ напряжений

Введение

Расчет тонких дисков, подверженных различным нагрузкам, является одной из классических задач теорий упругости и пластичности [1, 2]. При этом упругопластические решения получены в основном с использованием условия пластичности Треска или других условий пластичности, которые представляются линейными функциями главных напряжений [3–7]. Применение таких условий пластичности значительно упрощает исследование. В настоящей работе рассмотрены упругопластические диски, подверженные действию внутреннего и внешнего давлений, а также установившегося температурного поля, материал которых подчиняется условию пластичности Мизеса. Предполагается, что профиль диска образован гиперболами. В случае дисков постоянной толщины, находящихся под действием однородного температурного поля, общее решение такой краевой задачи было получено в [8]. В частности, в этой работе было показано, что построенные решения проявляют качественные особенности, которые зависят от входных данных. Кроме того, численные решения краевых задач в условиях плосконапряженного состояния встречаются сложности, которые не проявляются при других условиях деформирования [9].

В связи с этим представляет интерес нахождение аналитических и полуаналитических решений, обобщающих решения, представленные в [8].

Широкий класс тонких дисков составляют диски, профиль которых представляется гиперболами [10–18]. В [10] найдено распределение напряжений во вращающемся полом диске, отверстие которого занято включением. В [11] определено распределение напряжений во вращающемся диске, подверженном действию температурного поля. Параметрический анализ упругого решения для ортотропного вращающегося диска выполнен в [12]. В [13] найдено распределение напряжений в функционально-градиентном диске, подверженном действию температурного поля. Численный метод для оценки величины касательных напряжений, вызванных угловым ускорением во вращающихся дисках, применен в [14]. В [15] выполнен анализ упругих вращающихся дисков переменной толщины, включая диски гиперболического профиля. Распределение напряжений в диске гиперболического профиля в предположении изменяющейся вдоль радиуса плотности получено в [16]. В [17] это решение обобщено на диск, вращающийся на валу. В [18] представлены аналитические аппроксимации для предельной угловой скорости, при которой весь диск находится в упругом состоянии.

В настоящей работе решение [8] обобщено на диски такого профиля. Общее решение построено для произвольных значений внутреннего и внешнего давлений в предположении, что весь диск при этих значениях давлений является упругим. Повышение температуры на внутреннем радиусе диска приводит к возникновению пластической области. Общее решение использовано для расчёта напряжений в диске, подверженном только внешнему давлению и температурному полю. Определена область существования решения с одной пластической зоной, что является качественным отличием от соответствующего решения для диска постоянной толщины.

1. Постановка краевой задачи

Рассмотрим тонкий полый диск с внешним радиусом b_0 и внутренним радиусом a_0 в условиях плосконапряженного состояния. Толщина диска изменяется вдоль радиуса в соответствии с уравнением

$$h = h_0 \left(\frac{r}{b_0} \right)^{-n}, \quad (1)$$

где n – постоянная, h_0 – толщина диска при $r = b_0$. К внешнему и внутреннему радиусам диска приложены давления S_b и S_a соответственно (рис. 1).

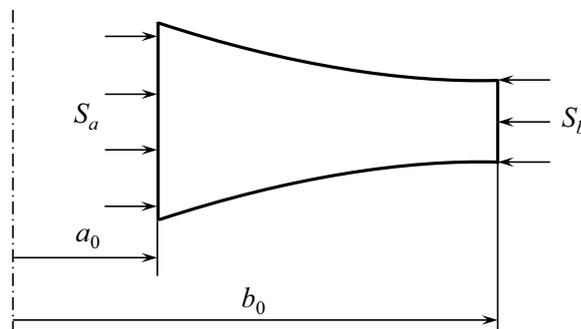


Рис. 1. Профиль диска и приложенные усилия

Температуру диска в начальном состоянии обозначим T_0 . Температура на внутренней поверхности диска медленно повышается, вызывая дополнительное нагружение диска. Распределение температуры по радиусу предполагается установившимся (т.е. пренебрегаем производной температуры по времени, что допустимо при медленном повышении температуры). Таким образом,

$$T = T_0 + (T_a - T_0) \frac{\ln(r/b_0)}{\ln(a_0/b_0)}, \quad (2)$$

где T_a – температура внутренней поверхности диска. Величины S_b и S_a выберем так, чтобы весь диск был упругим в начальный момент времени и оставался упругим, пока температура внутреннего радиуса диска находится в интервале $T_0 \leq T_a \leq T_e$. Величина T_e должна быть определена в ходе решения краевой задачи. На этой стадии процесса нагружения действуют уравнения Дюамеля–Неймана. В полярной системе координат (r, θ) , центр которой совпадает с центром диска, решение не зависит от полярного угла, и эти уравнения имеют вид

$$\varepsilon_r^e + \varepsilon_r^T = \frac{\sigma_r - \nu\sigma_\theta}{E} + \gamma(T - T_0), \quad \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^T = \frac{\sigma_\theta - \nu\sigma_r}{E} + \gamma(T - T_0). \quad (3)$$

Здесь σ_r – радиальное напряжение, σ_θ – окружное напряжение, ε_r^e – упругая составляющая радиальной деформации, ε_r^T – температурная составляющая радиальной деформации, ε_θ^e – упругая составляющая окружной деформации, ε_θ^T – температурная составляющая окружной деформации, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, γ – коэффициент линейного термического расширения. При $T_a = T_e$ на некотором радиусе диска, который должен определяться из решения, выполняется условие пластичности Мизеса, в рассматриваемом случае имеющее форму

$$\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r\sigma_\theta = \sigma_0^2, \quad (4)$$

где σ_0 – предел пластичности при одноосном растяжении. При $T_a > T_e$ диск находится в упругопластическом состоянии. Уравнения (3) выполняются в упругой области. Уравнения для деформаций в пластической области для определения поля напряжений не требуются. На всех стадиях процесса должны выполняться уравнение равновесия [10]

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (1 - n) \sigma_r - \sigma_\theta = 0 \quad (5)$$

и уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial(r\varepsilon_\theta)}{\partial r} - \varepsilon_r = 0. \quad (6)$$

Здесь ε_r – полная радиальная деформация, ε_θ – полная окружная деформация.

Краевые условия имеют вид

$$\sigma_r = -S_a \quad (7)$$

при $r = a_0$ и

$$\sigma_r = -S_b \quad (8)$$

при $r = b_0$.

Целесообразно ввести следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{T}{T_0}, \quad \tau_a = \frac{T_a}{T_0}, \quad a = \frac{a_0}{b_0}, \quad \rho = \frac{r}{b_0}, \\ s_r &= \frac{\sigma_r}{\sigma_0}, \quad s_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}, \quad s_b = \frac{S_b}{\sigma_0}, \quad s_a = \frac{S_a}{\sigma_0}, \\ k &= \frac{\sigma_0}{E}, \quad Q = \frac{\gamma T_0 (\tau_a - 1)}{k \ln a}. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда уравнение (3) после исключения T с помощью (2) примет вид

$$\frac{\varepsilon_r^e + \varepsilon_r^T}{k} = s_r - \nu s_\theta + Q \ln \rho, \quad \frac{\varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^T}{k} = s_\theta - \nu s_r + Q \ln \rho. \quad (10)$$

Уравнения (5) и (6) примут вид

$$\rho \frac{\partial s_r}{\partial \rho} + (1 - n) s_r - s_\theta = 0, \quad \frac{\partial (\rho \varepsilon_\theta)}{\partial \rho} - \varepsilon_r = 0. \quad (11)$$

Условие пластичности (4) перепишем как

$$s_r^2 + s_\theta^2 - s_r s_\theta = 1. \quad (12)$$

Краевые условия (7) и (8) преобразуются к виду

$$s_r = -s_a \quad (13)$$

при $\rho = a$ и

$$s_r = -s_b \quad (14)$$

при $\rho = 1$.

2. Общее решение

При $T_0 \leq T_a \leq T_e$ весь диск находится в упругом состоянии. Поэтому $\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^T$ и $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^T$. Подставив (10) во второе уравнение в (11), получим

$$\rho k \left(\frac{\partial s_\theta}{\partial \rho} - \nu \frac{\partial s_r}{\partial \rho} \right) + kQ = (1 + \nu) (s_r - s_\theta). \quad (15)$$

Первое уравнение в (11) и (15) составляют систему линейных дифференциальных уравнений для определения s_r и s_θ . Общее решение этой системы имеет вид

$$s_r = C_1 \rho^\alpha + C_2 \rho^\beta + \frac{Q}{n(1 + \nu)}, \quad (16)$$

$$s_\theta = C_1 (1 + \alpha - n) \rho^\alpha + C_2 (1 + \beta - n) \rho^\beta + \frac{Q(1 - n)}{n(1 + \nu)}.$$

Здесь C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, а показатели степени определяют как

$$\alpha = \frac{n - 2 + \sqrt{(2 - n)^2 + 4n(1 + \nu)}}{2}, \quad \beta = \frac{n - 2 - \sqrt{(2 - n)^2 + 4n(1 + \nu)}}{2}. \quad (17)$$

Подставив краевые условия (13) и (14) в (16), найдем

$$C_1 = \frac{(a^\beta - 1)Q + n(n + 1)(s_b a^\beta - s_a)}{n(n + 1)(a^\alpha - a^\beta)}, \quad C_2 = \frac{(1 - a^\alpha)Q + n(n + 1)(s_a - s_b a^\alpha)}{n(n + 1)(a^\alpha - a^\beta)}. \quad (18)$$

Уравнения (16) и (18) позволяют найти распределение напряжений по радиусу. Подставив эти напряжения в условие пластичности (12), можно определить величину Q , соответствующую началу пластического течения, и радиус, на котором возникает пластическое течение. Величина T_e определится из (9).

При $T > T_e$ имеются упругая и пластическая области. Решение (16) имеет силу в упругой области. Однако C_1 и C_2 не определяются из (18).

Рассмотрим пластическую область. Условие пластичности (12) удовлетворим подстановкой

$$s_r = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \psi, \quad s_\theta = -\frac{\sin \psi}{\sqrt{3}} - \cos \psi. \quad (19)$$

Здесь ψ – новая искомая функция. Подставив (19) в первое уравнение в (11), получим

$$\frac{d\rho}{d\psi} = \frac{2\rho}{\sqrt{3} + [1 - 2(1 - n)] \tan \psi}. \quad (20)$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \exp \left[\frac{\sqrt{3}(\psi - \psi_0)}{2(1 - n + n^2)} \right] \left[\frac{\sqrt{3} \cos \psi + (2n - 1) \sin \psi}{\sqrt{3} \cos \psi_0 + (2n - 1) \sin \psi_0} \right]^t, \quad (21)$$

где ρ_0 – значение ρ при $\psi = \psi_0$ и

$$t = \frac{2n - 1}{2(1 - n + n^2)}. \quad (22)$$

Пусть ρ_c – радиус упругопластической границы, а ψ_c – соответствующая величина ψ . Тогда из (21) следует

$$\frac{\rho_c}{\rho_0} = \exp \left[\frac{\sqrt{3}(\psi_c - \psi_0)}{2(1 - n + n^2)} \right] \left[\frac{\sqrt{3} \cos \psi_c + (2n - 1) \sin \psi_c}{\sqrt{3} \cos \psi_0 + (2n - 1) \sin \psi_0} \right]^t. \quad (23)$$

Радиальное и окружное напряжения должны быть непрерывны на упругопластической границе. Используя (16) и (19), эти условия выразим как

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \psi_c &= C_1 \rho_c^\alpha + C_2 \rho_c^\beta + \frac{Q}{n(1 + \nu)}, \\ -\frac{\sin \psi_c}{\sqrt{3}} - \cos \psi_c &= C_1 (1 + \alpha - n) \rho_c^\alpha + C_2 (1 + \beta - n) \rho_c^\beta + \frac{Q(1 - n)}{n(1 + \nu)}. \end{aligned} \quad (24)$$

Решив эту систему относительно C_1 и C_2 , получим

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[\frac{(2n - 2\beta - 1)}{\sqrt{3}} \sin \psi_c + \cos \psi_c - \frac{Q\beta}{n(1 + \nu)} \right] \frac{\rho_c^{-\alpha}}{(\beta - \alpha)}, \\ C_2 &= \left[\frac{(2n - 2\alpha - 1)}{\sqrt{3}} \sin \psi_c + \cos \psi_c - \frac{Q\alpha}{n(1 + \nu)} \right] \frac{\rho_c^{-\beta}}{(\alpha - \beta)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Заключительная часть общего решения зависит от радиуса, на котором возникает пластическое течение. Если пластическая область примыкает к внутренней поверхности диска, то решение (16) должно удовлетворять краевому условию (14). Тогда

$$C_1 + C_2 + \frac{Q}{n(1 + \nu)} = -s_b. \quad (26)$$

С другой стороны, краевое условие (13) и (19) показывают, что

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \psi_a = s_a, \quad (27)$$

где ψ_a – значение ψ при $\rho = a$. Тогда, положив $\psi_0 = \psi_a$, преобразуем уравнения (21) и (23) к форме

$$\rho = a \exp \left[\frac{\sqrt{3}(\psi - \psi_a)}{2(1 - n + n^2)} \right] \left[\frac{\sqrt{3} \cos \psi + (2n - 1) \sin \psi}{\sqrt{3} \cos \psi_a + (2n - 1) \sin \psi_a} \right]^t, \quad (28)$$

$$\rho_c = a \exp \left[\frac{\sqrt{3}(\psi - \psi_a)}{2(1 - n + n^2)} \right] \left[\frac{\sqrt{3} \cos \psi_c + (2n - 1) \sin \psi_c}{\sqrt{3} \cos \psi_a + (2n - 1) \sin \psi_a} \right]^t. \quad (29)$$

Исключив C_1 и C_2 в уравнении (26) с помощью (25), найдем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(2n - 2\beta - 1)}{\sqrt{3}} \sin \psi_c + \cos \psi_c - \frac{Q\beta}{n(1 + \nu)} \right] \frac{\rho_c^{-\alpha}}{(\beta - \alpha)} + \\ & + \left[\frac{(2n - 2\alpha - 1)}{\sqrt{3}} \sin \psi_c + \cos \psi_c - \frac{Q\alpha}{n(1 + \nu)} \right] \frac{\rho_c^{-\beta}}{(\alpha - \beta)} + \frac{Q}{n(1 + \nu)} = -s_b. \end{aligned} \quad (30)$$

В этом уравнении Q – параметр нагружения, а величина ρ_c может быть выражена через ψ_c посредством (29). Полученное таким образом уравнение служит для определения зависимости ψ_c от Q . Эта зависимость позволяет вычислить ρ_c , C_1 и C_2 из (29) и (25). Таким образом, уравнения (16) дают распределение напряжений в упругой области, а уравнения (19) и (28) – в пластической. Распределение напряжений в пластической области представлено в параметрическом виде.

Если пластическая область примыкает к внешней поверхности диска, то решение (16) должно удовлетворять краевому условию (13). Тогда

$$C_1 a^\alpha + C_2 a^\beta + \frac{Q}{n(1 + \nu)} = -s_a. \quad (31)$$

С другой стороны, краевые условия (14) и (19) показывают, что

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \psi_b = s_b, \quad (32)$$

где ψ_b – значение ψ при $\rho = 1$. Тогда, положив $\psi_0 = \psi_b$, преобразуем уравнения (21) и (23) к форме

$$\rho = \exp \left[\frac{\sqrt{3}(\psi - \psi_b)}{2(1 - n + n^2)} \right] \left[\frac{\sqrt{3} \cos \psi + (2n - 1) \sin \psi}{\sqrt{3} \cos \psi_b + (2n - 1) \sin \psi_b} \right]^t, \quad (33)$$

$$\rho_c = \exp \left[\frac{\sqrt{3}(\psi_c - \psi_b)}{2(1 - n + n^2)} \right] \left[\frac{\sqrt{3} \cos \psi_c + (2n - 1) \sin \psi_c}{\sqrt{3} \cos \psi_b + (2n - 1) \sin \psi_b} \right]^t. \quad (34)$$

Уравнение (30) имеет силу. Таким образом, дальнейший ход решения, позволяющий определить распределение напряжений вдоль радиуса диска, такой же, как в предыдущем случае.

3. Приложение общего решения

Рассмотрим типичный случай нагружения $s_a = 0$. Из (27) следует, что $\psi_a = 0$. Уравнения (28) и (29) примут вид

$$\rho = a \exp \left[\frac{\sqrt{3}\psi}{2(1 - n + n^2)} \right] \left[\cos \psi + \frac{(2n - 1) \sin \psi}{\sqrt{3}} \right]^t, \quad (35)$$

$$\rho_c = a \exp \left[\frac{\sqrt{3}\psi_c}{2(1-n+n^2)} \right] \left[\cos \psi_c + \frac{(2n-1)\sin \psi_c}{\sqrt{3}} \right]^t. \quad (36)$$

Уравнение (30) после исключения ρ_c с помощью (36) решим численно. Численное решение для напряжений в упругой области подставим в (12) для проверки условия

$$s_r^2 + s_\theta^2 - s_r s_\theta \leq 1. \quad (37)$$

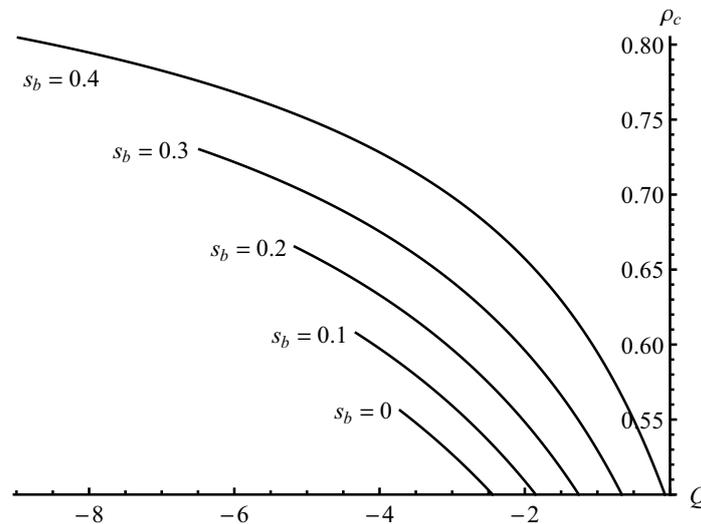
В отличие от диска постоянной толщины, это условие может нарушаться вблизи внешней поверхности диска при определенных значениях параметров. Величина Q , при которой неравенство в (37) обращается в равенство при $\rho = 1$, определяет интервал температуры $T_e \leq T_a \leq T_m$, внутри которого имеет место решение с одной пластической областью. Эта величина Q обозначена Q_m . Зависимость Q_m от n и s_b представлена в табл. 1 для $a = 1/2$ и $\nu = 0.3$. Соответствующая величина T_m определена из (9).

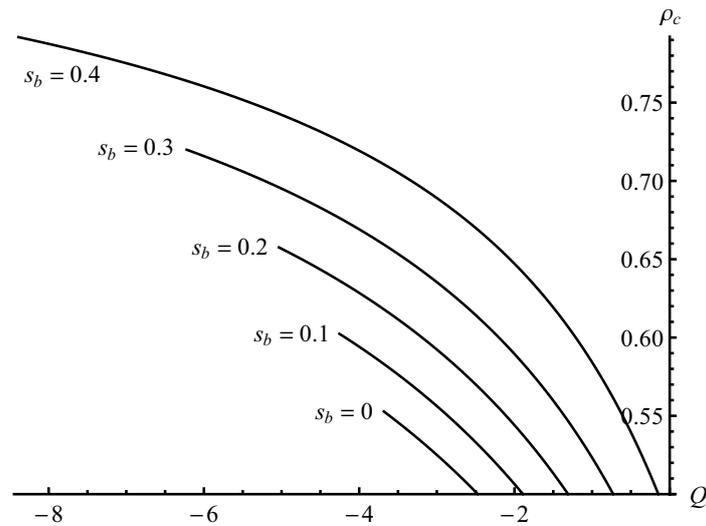
Табл. 1

Зависимость Q_m от n и s_b

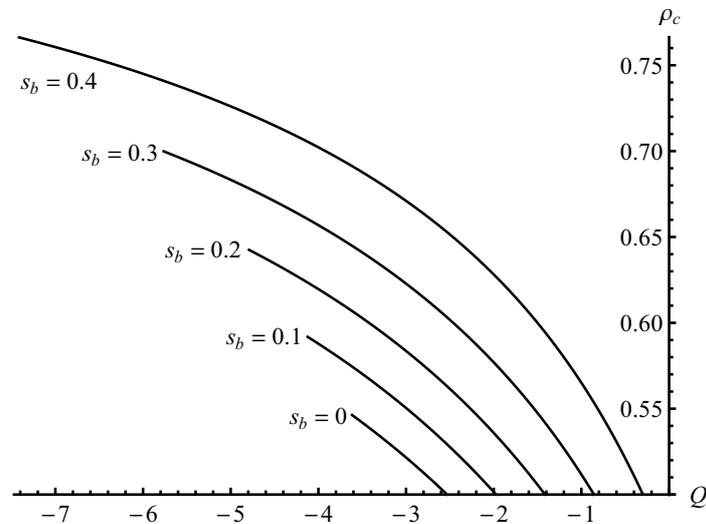
| $s_b \setminus n$ | 1/2 | 1/3 | 1/4 |
|-------------------|-------|-------|-------|
| 0 | -3.68 | -3.7 | -3.72 |
| 0.1 | -4.12 | -4.25 | -4.33 |
| 0.2 | -4.79 | -5.03 | -5.17 |
| 0.3 | -5.77 | -6.22 | -6.48 |
| 0.4 | -7.41 | -8.39 | -8.98 |

На рисунках 2–4 показана зависимость радиуса упругопластической границы от Q для нескольких значений s_b ($n = 1/4$ на рис. 2, $n = 1/3$ на рис. 3, $n = 1/2$ на рис. 4).

Рис. 2. Зависимость радиуса упругопластической границы от Q при $n = 1/4$

Рис. 3. Зависимость радиуса упругопластической границы от Q при $n = 1/3$

Левые концы линий соответствуют $Q = Q_m$. Из рисунков 2–4 видно, что величина s_b существенно влияет на положение упругопластической границы и величину Q_m . Распределение радиального и окружного напряжений по радиусу для нескольких значений n показано на рис. 5 и 6 соответственно.

Рис. 4. Зависимость радиуса упругопластической границы от Q при $n = 1/2$

При этом были приняты следующие значения существенных параметров: $a = 1/2$, $\nu = 0.3$, $Q = -5$, $s_b = 0.3$. Из рис. 5 видно, что влияние величины n на радиальное напряжение пренебрежимо мало. Это объясняется тем, что значение этого напряжения на внутреннем и внешнем радиусах диска зафиксировано граничными условиями. Влияние величины n на окружное напряжение также не велико (рис. 6). Таким образом, при выбранных краевых условиях основное

влияние величина n оказывает на положение упругопластической границы. Если выбранное значение Q меньше Q_m для всех значений n , представляющих интерес, то влияние профиля диска на распределение напряжений незначительно.

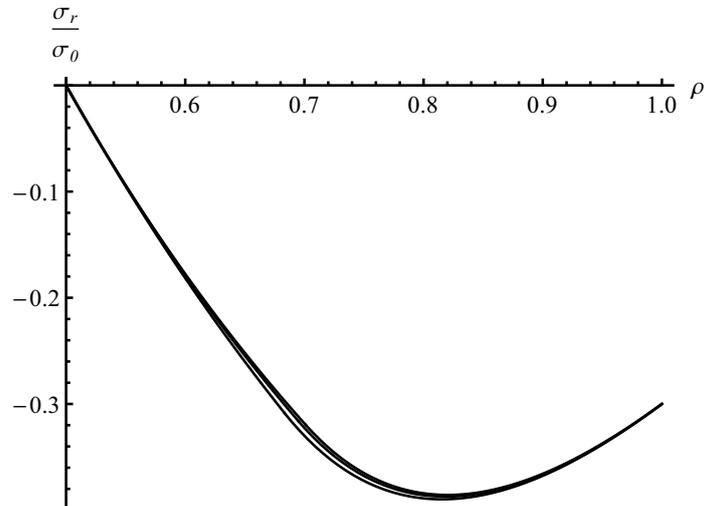


Рис. 5. Распределение радиального напряжения по радиусу при $s_b = 0.3$, $Q = -5$ и нескольких значениях n

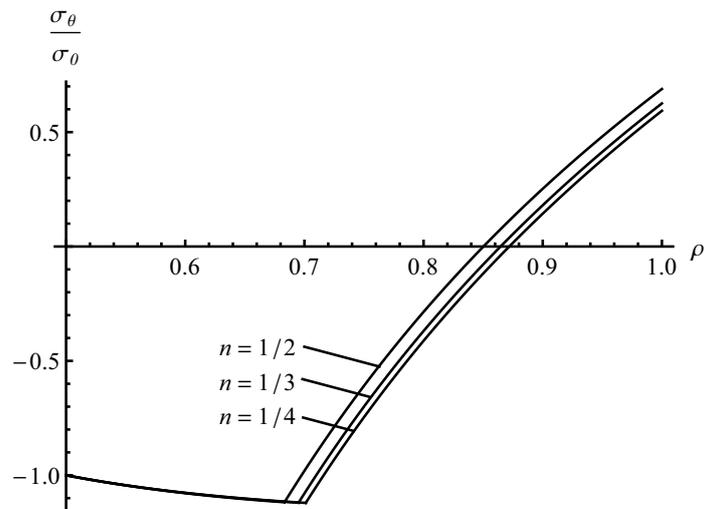


Рис. 6. Распределение окружного напряжения по радиусу при $s_b = 0.3$, $Q = -5$ и нескольких значениях n

4. Диски другого профиля и вращающиеся диски

Преимуществом полученного решения является то, что оно является полуаналитическим. Возможность получения полуаналитического решения возникает благодаря выбранному профилю диска. В общем случае такое решение невозможно. В частности, уравнение равновесия для диска произвольного профиля принимает

форму [19]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \sigma_r \frac{\partial \ln h}{\partial r} = 0. \quad (38)$$

Если зависимость толщины диска от радиуса представлена уравнением (1), то

$$\frac{\partial \ln h}{\partial r} = -\frac{n}{r}, \quad (39)$$

и уравнение (38) совпадает с (5). В этом случае возможность получения полуаналитического решения возникает благодаря тому, что (5) сводится к уравнению с разделяющимися переменными (20). В общем случае правая сторона уравнения (39) является функцией r , которая не позволяет свести (38) к уравнению с разделяющимися переменными, и интегрирование этого уравнения может быть выполнено численно.

Аналогичная трудность с получением полуаналитического решения возникает и при расчете вращающихся дисков, включая диски постоянной толщины. В частности, для дисков постоянной толщины уравнение (5) должно быть заменено уравнением

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\vartheta \omega^2 r, \quad (40)$$

где ϑ – плотность, ω – угловая скорость диска. Правая часть этого уравнения является функцией r , которая не позволяет свести его к уравнению с разделяющимися переменными.

Заключение

Построено общее полуаналитическое решение для определения поля напряжений в полом идеально упругопластическом диске, подверженном действию внешнего давления, внутреннего давления и установившегося температурного поля. Профиль диска представлен гиперболами. Пластические свойства материала диска характеризуются условием пластичности Мизеса. Общее решение применено для анализа диска, нагруженного внешним давлением и установившимся температурным полем. Пластическая область начинает формироваться вблизи внутренней поверхности диска. Однако, когда температура на внутренней поверхности диска достигает определенной величины, найденной из решения, возникает вторая пластическая область вблизи внешней поверхности диска. Выполнен параметрический анализ решения. Показано влияние параметров, входящих в формулировку краевой задачи, на положение упругопластической границы и распределение напряжений по радиусу диска.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00335).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
2. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
3. Gamer U. The elastic-plastic shrink fit with supercritical interference // Acta Mech. 1986. V. 61, No 1. P. 1–14. <https://doi.org/10.1007/BF01176358>.

4. *Gamer U., Kollmann F.G.* A theory of rotating elasto-plastic shrink fits // *Ing.-Arch.* 1986. V. 56, No 4. P. 254–264. <https://doi.org/10.1007/BF00542477>.
5. *Parmaksizog̃lu C., Güven U.* Plastic stress distribution in a rotating disk with rigid inclusion under a radial temperature gradient // *Mech. Struct. Mach.* 1998. V. 26, No 1. P. 9–20. <https://doi.org/10.1080/08905459808945417>.
6. *Eraslan A.N.* Elastic–plastic deformations of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions // *Int. J. Mech. Sci.* 2003. V. 45, No 4. P. 643–667. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00112-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00112-7).
7. *Prokudin A.* Schmidt-Ishlinskii yield criterion and a rotating cylinder with a rigid inclusion // *J. Appl. Comput. Mech.* 2021. V. 7, No 2. P. 858–869. <https://doi.org/10.22055/JACM.2020.35648.2704>.
8. *Alexandrov S.* Elastic/Plastic Discs under Plane Stress Conditions. Ser.: SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Cham: Springer, 2015. xi, 113 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-14580-8>.
9. *Kleiber M., Kowalczyk P.* Sensitivity analysis in plane stress elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1996. V. 137, Nos 3–4. P. 395–409. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01072-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01072-9).
10. *Güven U.* Elastic-plastic stress distribution in a rotating hyperbolic disk with rigid inclusion // *Int. J. Mech. Sci.* 1990. V. 40, No 1. P. 97–109. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(97\)00036-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(97)00036-2).
11. *Calderale P.M., Vivio F., Vullo V.* Thermal stresses of rotating hyperbolic disks as particular case of non-linearly variable thickness disks // *J. Therm. Stresses.* 2012. V. 35, No 10. P. 877–891. <https://doi.org/10.1080/01495739.2012.720164>.
12. *Motameni A.* A parametric study on the elastic limit stresses of rotating variable thickness orthotropic disk // *Arch. Appl. Mech.* 2024. V. 94, No 3. P. 737–752. <https://doi.org/10.1007/s00419-024-02548-y>.
13. *Demir E., Callioglu H., Sayer M.* Elasto-plastic thermal stress analysis of functionally graded hyperbolic discs // *Struct. Eng. Mech.* 2017. V. 62, No 5. P. 587–593. <https://doi.org/10.12989/sem.2017.62.5.587>.
14. *Salehian M., Shahriari B., Yousefi M.* Investigating the effect of angular acceleration of the rotating disk having variable thickness and density function on shear stress and tangential displacement // *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* 2019. V. 41, No 1. Art. 31. <https://doi.org/10.1007/s40430-018-1523-8>.
15. *Kutsal S.M., Coşkun S.B.* Deformation analysis of variable thickness rotating disks using an improved Adomian decomposition technique // *Int. J. Appl. Mech.* 2020. V. 12, No 1. Art. 2050002. <https://doi.org/10.1142/S1758825120500027>.
16. *Thakur P., Sethi M., Kumar N., Gupta K., Bhardwaj R.K.* Analytical solution of hyperbolic deformable disk having variable density // *Mech. Solids.* 2021. V. 56, No 6. P. 1039–1046. <https://doi.org/10.3103/S0025654421060194>.
17. *Thakur P., Sethi M., Kumar N., Gupta N., Gupta K., Bhardwaj R.K.* Stress analysis in an isotropic hyperbolic rotating disk fitted with rigid shaft // *Z. Angew. Math. Phys.* 2022. V. 73, No 1. Art. 23. <https://doi.org/10.1007/s00033-021-01663-y>.
18. *Kutsal S.M., Coşkun S.B.* Analytical approximations for elastic limit angular velocities of rotating annular disks with hyperbolic thickness // *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* 2023. V. 45, No 1. Art. 339. <https://doi.org/10.1007/s40430-023-04132-x>.
19. *Yella Reddy T., Srinath H.* Elastic stresses in a rotating anisotropic annular disk of variable thickness and variable density // *Int. J. Mech. Sci.* 1974. V. 16, No 2. P. 85–89. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(74\)90078-2](https://doi.org/10.1016/0020-7403(74)90078-2).

Поступила в редакцию 18.09.2024

Принята к публикации 11.11.2024

Лямина Елена Алексеевна, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
пр. Вернадского, д. 101, корп. 1, г. Москва, 119526, Россия
E-mail: *lyamina@inbox.ru*

Каленова Наталья Валерьевна, кандидат физико-математических наук, доцент

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 566–579

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.566-579

**Stress Analysis of a Hyperbolic Elastic-Plastic Disk
under Thermomechanical Loading**

E.A. Lyamina^{a}, N.V. Kalenova^b*

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
Moscow, 119526 Russia*

^b*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia*

E-mail: **lyamina@inbox.ru*

Received September 18, 2024; Accepted November 11, 2024

Abstract

A general solution is constructed for the distribution of stresses within a thin, hyperbolic elastic-plastic disk subjected to external and internal pressures while in a steady-state temperature field and under plane stress conditions. The pressures applied to the disk are assumed not to induce any plastic flow at the initial, uniformly distributed temperature. The disk is loaded by increasing the temperature of its inner radius. The temperature of the outer radius is kept constant. Elastic and temperature strains are related to stresses by the Duhamel–Neumann law. In the plastic region, the von Mises yield criterion is valid. The tensile yield stress is taken as constant. The boundary value problem is statically determinate. Therefore, the plastic flow rule is not required to determine the stress field. The final part of the general solution depends on the parameters classifying the boundary value problem, including whether the plastic flow initiates at the inner or outer radius of the disk. The solution is presented in dimensionless form. The loading parameter comprises the inner surface temperature of the disk, the coefficient of linear thermal expansion, the initial temperature of the disk, the dimensionless inner radius of the disk, the yield stress under uniaxial tension, and Young’s modulus. The general solution is obtained for both cases (for a plastic region appearing at the inner or outer radius of the disk). A specific numerical solution is constructed for a disk subjected to external pressure and a steady-state temperature field. The temperature of the inner radius at which the plastic region first appears is calculated. As it increases, the plastic region extends. At a certain temperature value, another plastic region appears near the outer radius of the disk. This value is determined as part of solving the boundary value problem. The influence of the parameters classifying the boundary value

problem on the development of the plastic region and the stress distribution along the radius of the disk is shown. The qualitative differences between the new and existing solutions for a disk of constant thickness under the action of a uniform temperature field are discussed.

Keywords: hyperbolic elastic-plastic disk, plane stress, von Mises yield criterion, thermomechanical loading, stress analysis

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00335).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Disk profile and applied forces.

Fig. 2. Dependence of the elastic-plastic boundary radius on Q at $n = 1/4$.

Fig. 3. Dependence of the elastic-plastic boundary radius on Q at $n = 1/3$.

Fig. 4. Dependence of the elastic-plastic boundary radius on Q at $n = 1/2$.

Fig. 5. Radial stress distribution along the radius at $s_b = 0.3$, $Q = -5$, and certain n values.

Fig. 6. Circumferential stress distribution along the radius at $s_b = 0.3$, $Q = -5$, and certain n values.

References

1. Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1975. 576 p. (In Russian)
2. Dem'yanushko I.V., Birger I.A. *Raschet na prochnost' vrashchayushchikhsya diskov* [Stress Calculations for Rotating Disks]. Moscow, Mashinostroenie, 1978. 247 p. (In Russian)
3. Gamer U. The elastic-plastic shrink fit with supercritical interference. *Acta Mech.*, 1986, vol. 61, no. 1, pp. 1–14. <https://doi.org/10.1007/BF01176358>
4. Gamer U., Kollmann F.G. A theory of rotating elasto-plastic shrink fits. *Ing.-Arch.*, 1986, vol. 56, no. 4, pp. 254–264. <https://doi.org/10.1007/BF00542477>.
5. Parmaksizoglu C., Güven U. Plastic stress distribution in a rotating disk with rigid inclusion under a radial temperature gradient. *Mech. Struct. Mach.*, 1998, vol. 26, no. 1, pp. 9–20. <https://doi.org/10.1080/08905459808945417>.
6. Eraslan A.N. Elastic-plastic deformations of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions. *Int. J. Mech. Sci.*, 2003, vol. 45, no. 4, pp. 643–667. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(03\)00112-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00112-7).
7. Prokudin A. Schmidt-Ishlinskii yield criterion and a rotating cylinder with a rigid inclusion. *J. Appl. Comput. Mech.*, 2021, vol. 7, no. 2, pp. 858–869. <https://doi.org/10.22055/JACM.2020.35648.2704>.
8. Alexandrov S. *Elastic/Plastic Discs under Plane Stress Conditions*. Ser.: SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Cham, Springer, 2015. xi, 113 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-14580-8>.
9. Kleiber M., Kowalczyk P. Sensitivity analysis in plane stress elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1996, vol. 137, nos. 3–4, pp. 395–409. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01072-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01072-9).
10. Güven U. Elastic-plastic stress distribution in a rotating hyperbolic disk with rigid inclusion. *Int. J. Mech. Sci.*, 1990, vol. 40, no. 1, pp. 97–109. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(97\)00036-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(97)00036-2).
11. Calderale P.M., Vivio F., Vullo V. Thermal stresses of rotating hyperbolic disks as particular case of non-linearly variable thickness disks. *J. Therm. Stresses*, 2012, vol. 35, no. 10, pp. 877–891. <https://doi.org/10.1080/01495739.2012.720164>.

12. Motameni A. A parametric study on the elastic limit stresses of rotating variable thickness orthotropic disk. *Arch. Appl. Mech.*, 2024, vol. 94, no. 3, pp. 737–752. <https://doi.org/10.1007/s00419-024-02548-y>.
13. Demir E., Callioglu H., Sayer M. Elasto-plastic thermal stress analysis of functionally graded hyperbolic discs. *Struct. Eng. Mech.*, 2017, vol. 62, no. 5, pp. 587–593. <https://doi.org/10.12989/sem.2017.62.5.587>.
14. Salehian M., Shahriari B., Yousefi M. Investigating the effect of angular acceleration of the rotating disk having variable thickness and density function on shear stress and tangential displacement. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 2019, vol. 41, no. 1, art. 31. <https://doi.org/10.1007/s40430-018-1523-8>.
15. Kutsal S.M., Coşkun S.B. Deformation analysis of variable thickness rotating disks using an improved Adomian decomposition technique. *Int. J. Appl. Mech.*, 2020, vol. 12, no. 1, art. 2050002. <https://doi.org/10.1142/S1758825120500027>.
16. Thakur P., Sethi M., Kumar N., Gupta K., Bhardwaj R.K. Analytical solution of hyperbolic deformable disk having variable density. *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 6, pp. 1039–1046. <https://doi.org/10.3103/S0025654421060194>.
17. Thakur P., Sethi M., Kumar N., Gupta N., Gupta K., Bhardwaj R.K. Stress analysis in an isotropic hyperbolic rotating disk fitted with rigid shaft. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2022, vol. 73, no. 1, art. 23. <https://doi.org/10.1007/s00033-021-01663-y>.
18. Kutsal S.M., Coşkun S.B. Analytical approximations for elastic limit angular velocities of rotating annular disks with hyperbolic thickness. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 2023, vol. 45, no. 6, art. 339. <https://doi.org/10.1007/s40430-023-04132-x>.
19. Yella Reddy T., Srinath H. Elastic stresses in a rotating anisotropic annular disk of variable thickness and variable density. *Int. J. Mech. Sci.*, 1974, vol. 16, no. 2, pp. 85–89. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(74\)90078-2](https://doi.org/10.1016/0020-7403(74)90078-2).

Для цитирования: Лямина Е.А., Каленова Н.В. Анализ напряжений в упруго-пластическом диске гиперболического профиля под действием термомеханической нагрузки // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 566–579. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.566-579>.

For citation: Lyamina E.A., Kalenova N.V. Stress analysis of a hyperbolic elastic-plastic disk under thermomechanical loading. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 566–579. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.566-579>. (In Russian)