

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2023.3.236-245

ЗАДАЧА ТИПА СТЕФАНА В КОМПОЗИЦИОННЫХ
МАТЕРИАЛАХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ
ПОДВИЖНЫХ ГРАНИЦ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

Ек. Л. Кузнецова¹, С. И. Жаворонок²

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский
университет), г. Москва, 125993, Россия

²Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва, 125040, Россия

Аннотация

Решена задача о теплопереносе в полубесконечных телах при наличии произвольного числа нестационарно подвижных границ фазовых превращений. Такие задачи возникают при высокотемпературном нагреве композиционных материалов, когда происходит разложение (деструкция) связующих с образованием подвижных границ начала и окончания фазовых превращений, границ уноса массы и т. д. Получено аналитическое решение задачи типа Стефана при произвольном числе нестационарно подвижных границ и подробно исследован теплоперенос при наличии двух подвижных границ.

Ключевые слова: теплоперенос, задача Стефана, подвижная граница, композиционный материал, разложение связующих, аналитическое решение

Введение

При высокотемпературном нагреве конструкций, изготовленных из композиционных материалов, например, тепловой защиты высокоскоростных летательных аппаратов из композиционных материалов, интенсивном нагреве композитов локальными источниками [1–6] возникают области разложения связующих, ограниченных подвижными границами начала и окончания разложения. При этом может появиться наружная подвижная граница уноса массы под воздействием высокотемпературного газодинамического потока, и необходимо находить решения в условиях произвольного числа подвижных границ фазовых превращений [7–9].

При циклическом нагреве, когда тепловые пики, сопровождающиеся фазовыми превращениями, сменяются тепловыми спадами без фазовых превращений, может возникать значительное число подвижных границ.

Известно значительное число физико-химических процессов, в которых под воздействием тепловых источников возникают нестационарно подвижные границы фазовых превращений, положения которых заранее определить невозможно, а можно определить только после нахождения поля температур, используя так называемые условия Стефана на данных границах – равенство разности тепловых потоков на подвижных границах тепловому эффекту фазовых превращений, а также условие непрерывности температур [10].

Ниже аналитически решена задача типа Стефана об определении теплового состояния в полубесконечной области с произвольным числом подвижных границ

фазовых превращений. В основу решения положены следующие предположения: газообразные компоненты на подвижных границах отсутствуют; подвижные границы не пересекаются; скорость движения границ положительна; температуры, тепловые эффекты и теплофизические характеристики постоянны.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу теории теплопроводности в многослойной конструкции, каждый слой которой ограничен двумя нестационарно подвижными границами фазовых превращений. При этом под номером 1 находится полубесконечный слой исходной фазы, ограниченной подвижной границей $x_1^*(t)$, причем наружный слой, примыкающий к границе $w1$, ограничен снаружи неподвижной границей с температурой T_{w1} , а изнутри – подвижной границей $x_{n-1}^*(t)$.

$$\frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} - \frac{1}{a_n} \frac{\partial T_n}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < X_{n-1}^*(t), \quad t > 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} - \frac{1}{a_s} \frac{\partial T_s}{\partial t} = 0, \quad x_s^*(t) < x < x_{s-1}^*(t), \quad t > 0, \quad s = 2, \dots, n-1; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = 0, \quad x_1^*(t) < x < \infty, \quad t > 0; \quad (3)$$

$$-\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{x=x_s^*(t)-0} + \lambda_{s-1} \frac{\partial T_{s-1}}{\partial x} \Big|_{x=x_{s-1}^*(t)+0} = Q_{s-1}^* \rho_{s-1} \dot{x}_{s-1}^*(t),$$

$$x = x_{s-1}^*(t), \quad t > 0, \quad s = 2, \dots, n; \quad (4)$$

$$T_s \Big|_{x=x_s^*(t)-0} = T_{s-1} \Big|_{x=x_s^*(t)+0} = T_{s-1}^*, \quad x = x_{s-1}^*(t), \quad t > 0, \quad s = 2, \dots, n; \quad (5)$$

$$T(0, t) = T_{w1}, \quad x = 0, \quad t > 0; \quad (6)$$

$$T(\infty, t) = T_0, \quad x = \infty, \quad t \geq 0; \quad (7)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad x \in (0, \infty), \quad t = 0; \quad (8)$$

$$x_s^*(0) = 0, \quad s = \overline{1, n-1}, \quad t = 0. \quad (9)$$

В задаче (1)–(8) условия (4), (5) – краевые условия Стефана на подвижных границах. Наружная граница $w1$ с температурой T_{w1} (6) может также рассматриваться подвижной под действием конвективно-кондуктивных тепловых потоков. Однако, чтобы не загромождать выкладки, будем далее считать границу $w1$ ($x = 0$) неподвижной.

Задача (1)–(9) нелинейна, в чем можно убедиться, подставив уравнения (1)–(3) в краевые условия (4), (5). Здесь λ , c , ρ , a , T , Q – теплопроводность, теплоемкость, плотность, температуропроводность, температура, теплота фазовых превращений соответственно.

Решением задач теплопереноса (т. е. задач для уравнений (1)–(3)) с граничными условиями первого рода (5)–(7) будут функции [11]

$$T_1(x, t) = T_1^* \frac{1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \right)}{1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x_1^*(t)}{2\sqrt{a_1 t}} \right)} + T_0 \frac{\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x_1^*(t)}{2\sqrt{a_1 t}} \right)}{1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x_1^*(t)}{2\sqrt{a_1 t}} \right)},$$

$$x_1^*(t) < x < \infty, \quad t > 0;$$

$$T_s(x, t) = \frac{T_{s-1}^* \operatorname{erf} \left(\frac{x_s^*(t)}{2\sqrt{a_s t}} \right) - T_s^* \operatorname{erf} \left(\frac{x_{s-1}^*(t)}{2\sqrt{a_s t}} \right) + (T_s^* - T_{s-1}^*) \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{a_s t}} \right)}{\operatorname{erf} \left(\frac{x_s^*(t)}{2\sqrt{a_s t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x_{s-1}^*(t)}{2\sqrt{a_s t}} \right)},$$

$$x_s^*(t) < x < x_{s-1}^*(t), \quad t > 0, \quad s = \overline{2, n-1};$$

$$T_n(x, t) = T_{w1} - (T_{w1} - T_{n-1}^*) \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_n t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{x_{n-1}^*(t)}{2\sqrt{a_n t}}\right)}, \quad 0 < x < x_{n-1}^*(t), \quad t > 0. \quad (12)$$

В зависимостях (10)–(12) координаты $x_s^*(t)$, $s = \overline{1, n-1}$, подвижных границ неизвестны. Для определения координат каждой границы имеем два краевых условия стефановского типа (4), (5) (всего $2n-2$ краевых условия). Из представления решений (10)–(12) ясно, что зависимости $x_s^*(t)$, $s = \overline{1, n-1}$, должны быть пропорциональны $\sqrt{a_s t}$, т. е.

$$x_s^*(t) = 2\chi_s \sqrt{a_s t}, \quad s = \overline{1, n-1}, \quad (13)$$

причем, поскольку $x_{s-1}^*(t) > x_s^*(t)$, для любых моментов времени постоянные $\chi_{s-1} > \chi_s$. В этом случае решения (10)–(12) с учетом (13) примут форму

$$T_1(x, t, \chi_1) = T_1^* \frac{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right)}{1 - \operatorname{erf}(\chi_1)} + T_0 \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right) - \operatorname{erf}(\chi_1)}{1 - \operatorname{erf}(\chi_1)}, \quad (14)$$

$$x_1^*(t) < x < \infty, \quad t > 0;$$

$$T_s(x, t, \chi_{s-1}, \chi_s) = \frac{T_{s-1}^* \operatorname{erf}(\chi_s) - T_s^* \operatorname{erf}\left(\chi_s \sqrt{\frac{a_{s-1}}{a_s}}\right) + (T_s^* - T_{s-1}^*) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_s t}}\right)}{\operatorname{erf}(\chi_s) - \operatorname{erf}\left(\chi_{s-1} \sqrt{\frac{a_{s-1}}{a_s}}\right)}, \quad (15)$$

$$x_s^*(t) < x < x_{s-1}^*(t), \quad t > 0, \quad s = \overline{2, n-1};$$

$$T_n(x, t, \chi_{n-1}) = T_{w1} - (T_{w1} - T_{n-1}^*) \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_n t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\chi_{n-1} \sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_n}}\right)}, \quad (16)$$

$$0 < x < x_{n-1}^*(t), \quad t > 0.$$

Для определения коэффициентов χ_s , $s = \overline{1, n-1}$, подставим решения (14)–(16) в краевые условия (4) и получим следующую систему из $n-1$ трансцендентных уравнений относительно χ_s , $s = \overline{1, n-1}$. Не теряя общности всего алгоритма, рассмотрим задачу (1)–(9) для $n = 3$ с двумя нестационарно подвижными границами $x = x_1^*(t)$ и $x = x_2^*(t)$, для определения координат которых получим следующую систему из двух трансцендентных уравнений (качественная картина процесса представлена на рис. 1).

$$F_I(\chi_1, \chi_2) = E \frac{\exp\left(-\chi_1^2 \frac{a_1}{a_2}\right)}{\operatorname{erf}\left(\chi_1 \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\right) - \operatorname{erf}(\chi_2)} - F \frac{\exp(-\chi_1^2)}{1 - \operatorname{erf}(\chi_1)} - \chi_1 = 0, \quad (17)$$

$$F_{II}(\chi_1, \chi_2) = C \frac{\exp\left(-\chi_2^2 \frac{a_2}{a_3}\right)}{\operatorname{erf}\left(\chi_2 \sqrt{\frac{a_2}{a_3}}\right) - \operatorname{erf}(\chi_1)} - D \frac{\exp(-\chi_2^2)}{\operatorname{erf}\left(\chi_1 \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\right) - \operatorname{erf}(\chi_2)} - \chi_2 = 0, \quad (18)$$

$$E = \sqrt{\frac{\lambda_2 c_2 \rho_2 c_1}{\pi \lambda_1 \rho_1} \frac{T_2^* - T_1^*}{Q_1^*}}; \quad F = \frac{c_1}{\sqrt{\pi}} \frac{T_1^* - T_0}{Q_1^*};$$

$$C = \sqrt{\frac{\lambda_3 c_3 \rho_3 c_2}{\pi \lambda_2 \rho_2} \frac{T_{w1} - T_1^*}{Q_2^*}}; \quad D = \frac{c_2}{\sqrt{\pi}} \frac{T_2^* - T_1^*}{Q_2^*}.$$

Поскольку $F_I(\chi_1, \chi_2)$, $F_{II}(\chi_1, \chi_2)$ – дифференцируемые функции, то для нахождения χ_1, χ_2 можно применить итерационный процесс Ньютона (при условии,

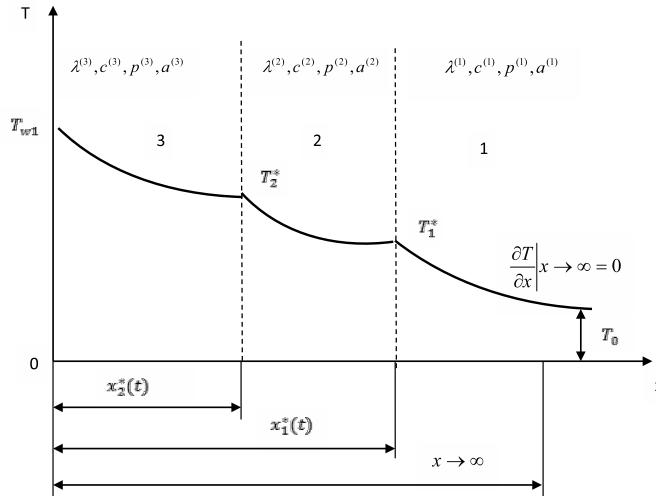


Рис. 1. Расчетная схема

что на каждой итерации якобиевы матрицы системы (17) и (18) невырождены). Однако для применения итерационных процедур необходимо найти начальное приближение вектора неизвестных $(\chi_1^{(0)}, \chi_2^{(0)})^T$. Для системы двух уравнений это можно сделать графически, построив кривые $F_I(\chi_1, \chi_2) = 0$, $F_{II}(\chi_1, \chi_2) = 0$ и найдя точку их пересечения; при этом каждую точку на плоскости $\chi_1 \times \chi_2$ для каждой из кривых необходимо находить итерационным методом из соответствующего уравнения (17) или (18). Найденную точку пересечения примем в качестве начального вектора $(\chi_1^{(0)}, \chi_2^{(0)})^T$, после чего используем итерационный процесс по уточнению χ_1 и χ_2 . Подставив далее найденные значения χ_1 , χ_2 и теплофизические характеристики в решения (13)–(16), получим нестационарное температурное поле в трех областях с двумя нестационарно подвижными границами, координаты которых определены в (13).

Сложность решения системы (17), (18) двух трансцендентных уравнений заключается в том, что компоненты матрицы Якоби

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_I(\chi_1, \chi_2)}{\partial \chi_1} & \frac{\partial F_I(\chi_1, \chi_2)}{\partial \chi_2} \\ \frac{\partial F_{II}(\chi_1, \chi_2)}{\partial \chi_1} & \frac{\partial F_{II}(\chi_1, \chi_2)}{\partial \chi_2} \end{bmatrix}$$

имеют очень большие значения производных в окрестности вектора-решения $(\chi_1, \chi_2)^T$, и незначительные колебания итерационных значений χ_1 , χ_2 приводят к значительным колебаниям элементов этой матрицы, что может уводить расчеты от решения $(\chi_1, \chi_2)^T$ и приводить к аварийному останову. Поэтому компоненты начального вектора $(\chi_1^{(0)}, \chi_2^{(0)})^T$ необходимо вычислять с высокой точностью с отклонением от точного вектора $(\chi_1, \chi_2)^T$ в несколько процентов.

Для варьируемых значений Q_1^* , Q_2^* , T_1^* , T_2^* и следующей системы входных данных

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda = 0.001 \text{ kW/mK}; \quad c_1 = c_2 = c_3 = c = 1.5 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K};$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho = 2000 \text{ kg/m}^3; \quad a_1 = a_2 = a_3 = a = \frac{\lambda}{c\rho} = \frac{10^6}{3} \text{ m}^2/\text{s};$$

$T_0 = 300$ K; $T_{w1} = 2000$ K; $x_1^*(0) = 0$ m, $x_2^*(0) = 0$ m получены результаты решения задачи (1)–(9) в виде распределения температур и координат подвижных границ, представленных на рисунках 2–5.

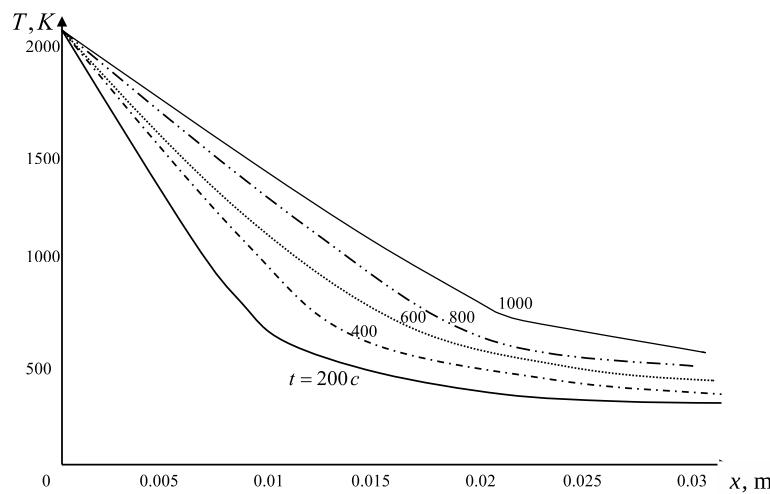


Рис. 2. Распределение температур в трех областях, ограниченных подвижными границами $Q = Q_1^* = Q_2^* = 1000$ kJ/kg, $T_1^* = 600$ K, $T_2^* = 900$ K

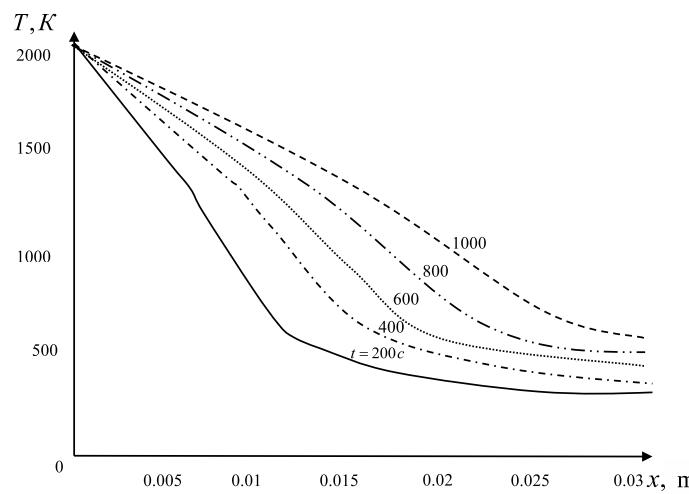


Рис. 3. Распределение температур в трех областях, ограниченных подвижными границами $Q = Q_1^* = Q_2^* = 1000$ kJ/kg, $T_1^* = 600$ K, $T_2^* = 1300$ K

На рисунках 2 и 3 представлены температурные поля в трех областях для случая различных температур T^* и T^{**} в различные моменты времени. На рисунках четко прослеживаются положения границ $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$ по разрыву касательных к графикам функций, причем если разность $\Delta T^* = T_2^* - T_1^*$ мала ($\Delta T^* = 300$ K, рисунок 2), то профили температур находятся на более близком расстоянии друг от друга по сравнению со случаем $\Delta T^* = 700$ K на рисунке 3. При этом скорость

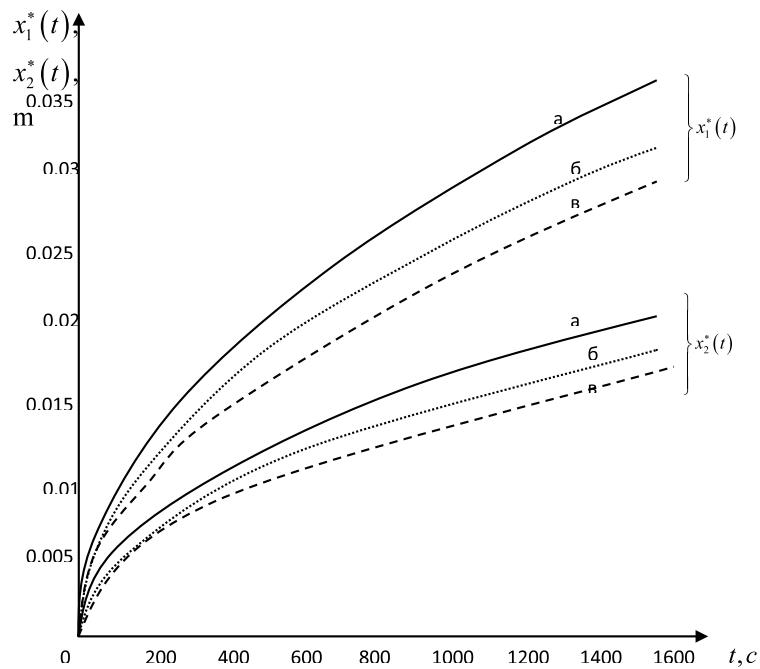


Рис. 4. Изменение координат нестационарно подвижных границ $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ при $T_1^* = 600\text{K}$, $T_2^* = 1200\text{K}$: а) $Q = Q_1^* = Q_2^* = 600\text{ kJ/K}$; б) $Q = Q_1^* = Q_2^* = 1000\text{ kJ/K}$; в) $Q = Q_1^* = Q_2^* = 1400\text{ kJ/K}$

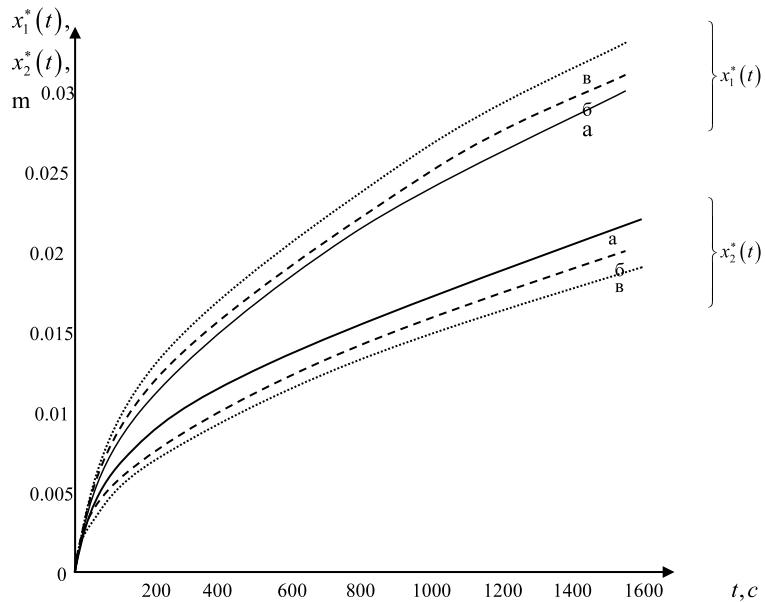


Рис. 5. Изменение координат нестационарно подвижных границ $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ при а) $T_1^* = 600\text{K}$, $T_2^* = 900\text{K}$; б) $T_1^* = 600\text{K}$, $T_2^* = 1100\text{K}$; в) $T_1^* = 600\text{K}$, $T_2^* = 1300\text{K}$.

движения границ в существенной степени зависит от уровня температур T_1^* и T_2^* и теплоты фазовых превращений Q_1^* и Q_2^* .

На рисунках 4, 5 представлены координаты подвижных границ $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$, причем на рисунке 4 приведены результаты при фиксированных T_1^* и T_2^* и варьируемых значениях $Q = Q_1^* = Q_2^*$, а на рисунке 5 – аналогичные результаты при фиксированном значении $Q = Q_1^* = Q_2^*$ и варьируемых значениях T_1^* и T_2^* . Из рисунков видно, что при фиксированных значениях T_1^* и T_2^* и монотонно возрастающих значениях $Q = Q_1^* = Q_2^*$ (рисунок 4) скорости движения границ $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$ монотонно убывают.

Наоборот, при фиксированных значениях $Q = Q_1^* = Q_2^*$, T_1^* и монотонно возрастающих T_2^* (рис. 5) скорость движения границы $x_2^*(t)$ монотонно убывает, а скорость движения границы $x_1^*(t)$ монотонно возрастает (несмотря на то, что $T_1^* = 600$ К = Const), что является неожиданным результатом.

2. Выводы

Поставлена и аналитически решена задача типа Стефана со многими нестационарно подвижными границами. Анализ полученных результатов показал, что температурные профили в точках $x_1^*(t)$ и $x_2^*(t)$ имеют изломы касательных в соответствии с условиями Стефана, а скорости движения границ в существенной степени влияют друг на друга.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (код проекта 23-19-00680).

Литература

1. Orekhov A., Rabinskiy L., Fedotenkov G. Analytical model of heating an isotropic half-space by a moving laser source with a Gaussian distribution // Symmetry. 2022. V. 14, No 4. Art. 650. <http://doi.org/10.3390/sym14040650>.
2. Fedotenkov G., Rabinskiy L., Lurie S. Conductive heat transfer in materials under intense heat flows // Symmetry. 2022. V. 14, No 9. Art. 1950. <https://doi.org/10.3390/sym14091950>.
3. Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotenkov G.V., Hein T.Z. Heating of a half-space by a moving thermal laser pulse source // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, No 8. P. 1912–1919. <http://doi.org/10.1134/s1995080221080229>.
4. Sha M., Rabinskiy L.N., Orekhov A.A. Impact of raindrop erosion on structural components // Russ. Eng. Res. 2023. V. 43, No 7. P. 834–837. <https://doi.org/10.3103/S1068798X23070195>.
5. Formalev V.F., Garibyan B.A., Orekhov A.A. Mathematical modeling of heat transfer in anisotropic half-space based on the generalized parabolic wave heat transfer equation // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, No 7. P. 1842–1849. <https://doi.org/10.1134/S1995080222100110>.
6. Sha M., Volkov A.V., Orekhov A.A., Kuznetsova E.L. Micro-dilatation effects in a two-layered porous structure under uniform heating // J. Balk. Tribol. Assoc. 2021. V. 27, No 2. P. 280–294.
7. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Миканев С.В. Моделирование теплового состояния композиционных материалов // ТВТ. 2003. Т. 41, № 6. С. 935–941.

8. Кузнецова Ек.Л. Математическое моделирование тепломассопереноса в композиционных материалах при высокointенсивном нагреве. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МАИ, 2006. 138 с.
9. Формалев В.Ф., Кузнецова Ек.Л. Многомерный теплоперенос при наличии фазовых переходов в анизотропных композиционных материалах // Мех. комп. матер. и констр. 2007. Т. 13, № 4. С. 129–141.
10. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
11. Формалев В.Ф., Федотенков Г.В., Кузнецова Ек.Л. Общий подход к моделированию теплового состояния композиционных материалов при высокотемпературном нагружении // Мех. комп. матер. и констр. 2006. Т. 12, № 1. С. 141–156.

Поступила в редакцию 30.08.2023
Принята к публикации 24.09.2023

Кузнецова Екатерина Львовна, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник НИО-9 ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, А-80, ГСП-3, Россия
E-mail: lareyna@mail.ru

Жаворонок Сергей Игоревич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФГБУН «Институт прикладной механики Российской академии наук»

Институт прикладной механики Российской академии наук
Ленинградский просп., д. 7, г. Москва, 125040, Россия
E-mail: zhavoronok@iam.ras.ru

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 3, pp. 236–245

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.3.236-245

A Stefan Problem for Composite Materials with an Arbitrary Number of Moving Phase-Transition Boundaries

E.L. Kuznetsova^{a*}, S.I. Zhavoronok^{b**}

^a*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia*

^b*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125040 Russia*

E-mail: *lareyna@mail.ru, **zhavoronok@iam.ras.ru

Received August 30, 2023; Accepted September 24, 2023

Abstract

A Stefan problem of heat transfer in semi-infinite bodies with an arbitrary number of unsteady moving boundaries during phase transitions was solved. Such problems arise when composite materials are heated at high temperatures, causing the binding agents to decompose (destruct) thermally, which leads to the formation of moving boundaries in the onset and end of phase transitions, mass transfer, etc. An analytical solution of the Stefan problem with an

arbitrary number of unsteady moving boundaries was obtained. The heat transfer process with two moving boundaries was analyzed.

Keywords: heat transfer, Stefan problem, moving boundary, composite material, destruction of binding agents, analytical solution

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-19-00680).

Figure Captions

- Fig. 1. Computational scheme.
- Fig. 2. Distribution of temperatures in three regions with moving boundaries $Q = Q_1^* = Q_2^* = 1000 \text{ kJ/kg}$, $T_1^* = 600\text{K}$, $T_2^* = 900\text{K}$.
- Fig. 3. Distribution of temperatures in three regions with moving boundaries $Q = Q_1^* = Q_2^* = 1000 \text{ kJ/kg}$, $T_1^* = 600\text{K}$, $T_2^* = 1300\text{K}$.
- Fig. 4. Shift in the coordinates of the unsteady moving boundaries $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ at $T_1^* = 600\text{K}$, $T_2^* = 1200\text{K}$: a) $Q = Q_1^* = Q_2^* = 600 \text{ kJ/K}$; b) $Q = Q_1^* = Q_2^* = 1000 \text{ kJ/K}$; c) $Q = Q_1^* = Q_2^* = 1400 \text{ kJ/K}$.
- Fig. 5. Shift in the coordinates of the unsteady moving boundaries $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ at a) $T_1^* = 600\text{K}$, $T_2^* = 900\text{K}$; b) $T_1^* = 600\text{K}$, $T_2^* = 1100\text{K}$; c) $T_1^* = 600\text{K}$, $T_2^* = 1300\text{K}$.

References

1. Orekhov A., Rabinskiy L., Fedotenkov G. Analytical model of heating an isotropic half-space by a moving laser source with a Gaussian distribution. *Symmetry*, 2022, vol. 14, no. 4, art. 650. <http://doi.org/10.3390/sym14040650>.
2. Fedotenkov G., Rabinskiy L., Lurie S. Conductive heat transfer in materials under intense heat flows. *Symmetry*, 2022, vol. 14, no. 9, art. 1950. <https://doi.org/10.3390/sym14091950>.
3. Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotenkov G.V., Hein T.Z. Heating of a half-space by a moving thermal laser pulse source. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 8, pp. 1912–1919. <http://doi.org/10.1134/s1995080221080229>.
4. Sha M., Rabinskiy L.N., Orekhov A.A. Impact of raindrop erosion on structural components. *Russ. Eng. Res.*, 2023, vol. 43, no. 7, pp. 834–837. <https://doi.org/10.3103/S1068798X23070195>.
5. Formalev V.F., Garibyan B.A., Orekhov A.A. Mathematical modeling of heat transfer in anisotropic half-space based on the generalized parabolic wave heat transfer equation. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 7, pp. 1842–1849. <https://doi.org/10.1134/S1995080222100110>.
6. Sha M., Volkov A.V., Orekhov A.A., Kuznetsova E.L. Micro-dilatation effects in a two-layered porous structure under uniform heating. *J. Balk. Tribol. Assoc.*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 280–294.
7. Formalev V.F., Kolesnik S.A., Mikanov S.V. Simulation of the thermal state of composite materials. *High Temp.*, vol. 41, no. 6, pp. 832–838. <https://doi.org/10.1023/B:HITE.0000008341.27025.54>.
8. Kuznetsova E.L. Mathematical modeling of heat and mass transfer in composite materials during high-temperature exposure. *Cand. Phys.-Math. Sci. Diss.* Moscow, MAI, 2006. 138 p. (In Russian)
9. Formalev V.F., Kuznetsova E.L. Multidimensional heat transfer with phase transition in anisotropic composite materials. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, vol. 13, no. 4, pp. 129–141. (In Russian)

-
10. Carslaw H., Jaeger J. *Teploprovodnost' tverdykh tel* [Conduction of Heat in Solids]. Moscow, Nauka, 1964. 487 p. (In Russian)
 11. Formalev V.F., Fedotenkova G.V., Kuznetsova E.L. A general approach to simulation of the thermal state of composite materials under high temperature loading. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2006, vol. 12, no. 1, pp. 141–156. (In Russian)
-

Для цитирования: Кузнецова Е.Л., Жаворонок С.И. Задача типа Стефана в композиционных материалах с произвольным числом подвижных границ фазовых превращений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 3. С. 236–245. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.3.236-245>.

For citation: Kuznetsova E.L., Zhavoronok S.I. A Stefan problem for composite materials with an arbitrary number of moving phase-transition boundaries. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 3, pp. 236–245. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.3.236-245>. (In Russian)