

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 629.7.052

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.499-517

ЗАДАЧА СТАБИЛИЗАЦИИ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В.И. Каленова¹, В.М. Морозов¹, А.А. Тихонов²

¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
г. Москва, 119991, Россия

²Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, 199034, Россия

Аннотация

Рассмотрен спутник на круговой кеплеровской околоземной орбите. Исследована задача стабилизации положения относительного равновесия спутника в орбитальной системе координат при помощи собственного магнитного момента и момента Лоренца. Коэффициенты системы динамических уравнений вращательного движения спутника изменяются во времени из-за изменения геомагнитной индукции в процессе орбитального движения спутника. Линеаризованная система дифференциальных уравнений движения также является нестационарной, но допускает, как показано в статье, приведение к стационарной системе более высокого порядка даже при использовании достаточно точных мультипольных моделей геомагнитного поля. На этом основании предложен способ построения закона управления, обеспечивающего стабилизацию спутника. Проведен анализ управляемости системы и построен оптимальный алгоритм стабилизации на основе LQR-метода. Эффективность предложенного подхода подтверждена компьютерным моделированием.

Ключевые слова: спутник, стабилизация ориентации спутника, геомагнитное поле, управляемость, оптимальное управление

Введение

Среди силовых факторов, используемых в динамике управляемого вращательного движения спутников, важную роль играют моменты сил, формируемые за счет взаимодействия спутника с магнитным полем Земли. К числу этих моментов относятся момент, образующийся при взаимодействии с геомагнитным полем собственного момента спутника, создаваемого магнитными катушками, и момент сил Лоренца, возникающий при наличии на спутнике электрического заряда. Оба упомянутых момента могут использоваться в качестве управляющих моментов для решения задач стабилизации стационарных движений спутника. При этом неизбежно возникает вопрос выбора математической модели магнитного поля Земли той или иной степени сложности: «прямой» магнитный диполь, «наклонный» магнитный диполь, квадрупольное и октупольное приближения и др. [1].

Как правило, в большинстве теоретических исследований проблем стабилизации, как с помощью внутренних магнитных моментов, так и с помощью моментов сил Лоренца (см. обзоры [2–7]), на этапе предварительных исследований используется самая простая модель магнитного поля Земли – «прямой» магнитный диполь. Модель «наклонного» магнитного диполя не является корректной, как

показано в [8]. Для дальнейших исследований задач стабилизации следует использовать более точные модели магнитного поля Земли, например, квадрупольное и октупольное приближения и др. [1].

Математические модели рассматриваемых задач представляют собой системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, так как управляющий момент является функцией геомагнитного поля, которое изменяется во время движения спутника по орбите вокруг Земли. Для простой модели поля авторами были решены различные задачи стабилизации стационарных движений спутника (относительного равновесия и регулярных прецессий), когда центр масс спутника движется по круговой орбите [2–6, 9–13]. Уравнения управляемого вращательного движения спутника являются существенно нестационарными. Для их исследования был предложен способ приведения нестационарных систем к стационарным системам большего порядка. Этот подход оказался весьма успешным и применялся ранее для решения других задач [14, 15]. Следует отметить, что в отличие от метода функций Ляпунова, хорошо зарекомендовавшего себя при решении аналогичных задач [16, 17], предлагаемый метод является строгим и достаточно эффективным (при наличии управляемости построение стабилизирующего управления сводится к выбору параметров квадратичного функционала качества). Цель статьи – применить указанный подход к решению задачи стабилизации положения относительного равновесия спутника при использовании сложной модели геомагнитного поля.

1. Постановка задачи

Рассмотрим движение спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях Земли. Предположим, что центр масс спутника движется по круговой экваториальной орбите. Спутник снабжен магнитными катушками и экраном, обладающим электрическим зарядом. Используем две правые системы координат: $OXYZ$ – орбитальная система координат с началом в центре масс спутника: ось OZ направлена по радиус-вектору центра масс относительно притягивающего центра (центра Земли), OY – по нормали к плоскости орбиты, OX дополняет систему до правой тройки; $Oxyz$ – связанная система координат (подвижная), оси которой направлены по главным центральным осям инерции спутника. Ориентация системы $Oxyz$ относительно орбитальной задается с помощью углов $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Элементы матрицы $\Theta = \|\Theta_{ij}\|$ перехода от системы $OXYZ$ к системе $Oxyz$ имеют вид [18]

$$\begin{aligned}\Theta_{11} &= \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3, \\ \Theta_{12} &= -\sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad \Theta_{13} = \cos \theta_1 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ \Theta_{21} &= \sin \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3, \quad \Theta_{22} = \cos \theta_1 \cos \theta_2, \\ \Theta_{23} &= \sin \theta_1 \sin \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ \Theta_{31} &= -\cos \theta_2 \sin \theta_3, \quad \Theta_{32} = \sin \theta_2, \quad \Theta_{33} = \cos \theta_2 \cos \theta_3.\end{aligned}$$

Компоненты абсолютной угловой скорости спутника ω в проекциях на оси системы координат $Oxyz$ имеют вид [18]

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{d\theta_1}{dt} \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \frac{d\theta_2}{dt} \cos \theta_3 + \omega_0 \Theta_{21}, \\ \omega_2 &= \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_1}{dt} \sin \theta_2 + \omega_0 \Theta_{22}, \\ \omega_3 &= \frac{d\theta_1}{dt} \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \frac{d\theta_2}{dt} \sin \theta_3 + \omega_0 \Theta_{23},\end{aligned}$$

где ω_0 – величина угловой скорости орбитального движения спутника.

Динамические уравнения движения спутника около центра масс имеют вид [18]

$$\mathbf{J} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} = 3\omega_0^2 (\boldsymbol{\Theta}^\top \mathbf{e}_r) \times \mathbf{J} (\boldsymbol{\Theta}^\top \mathbf{e}_r) + \mathbf{M}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$; J_1, J_2, J_3 – главные центральные моменты инерции спутника, $\mathbf{e}_r$ – единичный вектор оси OZ , $\mathbf{M}$ – управляющий момент, который создается как за счет взаимодействия собственного дипольного магнитного момента спутника с магнитным полем Земли ($\mathbf{M}^{(1)}$), так и силами Лоренца, действующими на заряженную поверхность спутника ($\mathbf{M}^{(2)}$). В результате имеем $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(2)}$.

При наличии на спутнике магнитных катушек, создающих собственный магнитный момент $\mathbf{u}$ за счет взаимодействия с геомагнитным полем с индукцией $\mathbf{b}(t)$, можно сформировать механический момент [19]

$$\mathbf{M}^{(1)} = \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\Theta}^\top \mathbf{b}). \quad (2)$$

Другой способ управления основан на использовании электродинамического эффекта влияния лоренцевых сил, действующих на заряженную часть поверхности спутника. Такой метод впервые был предложен одним из авторов [20]. В этой работе было показано, что путем изменения радиус-вектора центра заряда спутника относительно его центра масс можно создать момент лоренцевых сил и использовать его в качестве управляющего момента. Момент этих сил относительно центра масс спутника определяется по формуле [15, 21–23]

$$\mathbf{M}^{(2)} = q \mathbf{r}_q \times \boldsymbol{\Theta}^\top (\mathbf{V}_c \times \mathbf{b}). \quad (3)$$

Здесь q – электростатический заряд, $\mathbf{r}_q = [x_q, y_q, z_q]^\top$ – радиус-вектор центра заряда спутника относительно его центра масс; $\mathbf{V}_c = R_0(\omega_0 - \omega_E) \mathbf{e}_\tau$ – скорость центра масс спутника, $\mathbf{e}_\tau$ – орт оси OX , R_0 – радиус орбиты спутника, ω_E – угловая скорость суточного вращения Земли.

Поскольку оба момента (2) и (3) зависят от вектора $\mathbf{b}$ индукции геомагнитного поля, неизбежным этапом решения задачи является рассмотрение аналитического представления вектора $\mathbf{b}$. Существуют многочисленные аппроксимации выражения для вектора $\mathbf{b}$ различной степени сложности: «прямой» магнитный диполь, «наклонный» магнитный диполь, квадрупольное и октупольное приближения и др. [1, 15, 23, 24]. Как уже указывалось, в большинстве теоретических исследований проблем стабилизации используется самая простая модель – «прямой» магнитный диполь. Здесь рассмотрена наиболее полная из упомянутых – октупольная модель. В октупольном приближении компоненты вектора магнитной индукции $\mathbf{b}(t)$ в орбитальной системе координат при движении в экваториальной плоскости имеют вид [1]

$$\begin{aligned} b_1 &= \mu_0 \left[(g_1^1 \sin \tau - h_1^1 \cos \tau) + \nu (g_2^2 \sin 2\tau - h_2^2 \cos 2\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{6}}{12} \nu^2 (\sqrt{15}(g_3^3 \sin 3\tau - h_3^3 \cos 3\tau) - (g_3^1 \sin \tau - h_3^1 \cos \tau)) \right], \\ b_2 &= -\mu_0 \left[g_1^0 + \nu (g_2^1 \cos \tau + h_2^1 \sin \tau) + \frac{\nu^2}{6} (\sqrt{15}(g_3^2 \cos 2\tau + h_3^2 \sin 2\tau) - 3g_3^0) \right], \quad (4) \\ b_3 &= \mu_0 \left[2(g_1^1 \cos \tau + h_1^1 \sin \tau) + \frac{\sqrt{3}}{2} \nu (\sqrt{3}(g_2^2 \cos 2\tau + h_2^2 \sin 2\tau) - g_2^0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{2}}{3} \nu^2 (\sqrt{5}(g_3^3 \cos 3\tau + h_3^3 \sin 3\tau) - \sqrt{3}(g_3^1 \cos \tau + h_3^1 \sin \tau)) \right], \end{aligned}$$

где $\mu_0 = (R_E/R_0)^3$, $\nu = \sqrt{3}R_E/R_0$. Здесь g_n^m , h_n^m – гауссовы коэффициенты; $\tau = (1 - \varepsilon)t$ – безразмерная независимая переменная, $\varepsilon = \omega_E/\omega_0$; R_E – средний радиус Земли. Значения первых коэффициентов g_n^m , h_n^m (в нТ = 10^{-9} Т), согласно [24], таковы:

$$\begin{aligned} g_1^0 &= -29557, & g_1^1 &= -1671.8, & h_1^1 &= 5080, & g_2^0 &= -2340, \\ g_2^1 &= 3047, & h_2^1 &= -2595, & g_2^2 &= 1657, & h_2^2 &= -517. \end{aligned}$$

Выражения для компонент вектора магнитной индукции b_1, b_2, b_3 содержат периодические функции с частотами, равными 1, 2, 3. Для пояснения сути предложенного ранее подхода к исследованию систем, нестационарных по управлению, ограничимся в выражениях (4) квадрупольным приближением, т. е. рассмотрением только частот 1 и 2:

$$\begin{aligned} b_1 &= \mu_0 [(g_1^1 \sin \tau - h_1^1 \cos \tau) + \nu (g_2^2 \sin 2\tau - h_2^2 \cos 2\tau)], \\ b_2 &= -\mu_0 [g_1^0 + \nu (g_2^1 \cos \tau + h_2^1 \sin \tau)], \\ b_3 &= \mu_0 [2(g_1^1 \cos \tau + h_1^1 \sin \tau) + 1.5\nu (g_2^2 \cos 2\tau + h_2^2 \sin 2\tau - \tilde{g}_2^0)], \text{ где } \tilde{g}_2^0 = g_2^0/\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Линеаризованные уравнения движения спутника в окрестности положения относительного равновесия на круговой экваториальной орбите имеют вид [25]

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - \tilde{d}_1 \dot{x}_3 - \tilde{\kappa}_1 x_1 &= M_1/J_1, \\ \ddot{x}_2 - \tilde{\kappa}_2 x_2 &= M_2/J_2, \\ \ddot{x}_3 + \tilde{d}_3 \dot{x}_1 - \tilde{\kappa}_3 x_3 &= M_3/J_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $x_1 = \theta_2$, $x_2 = \theta_3$, $x_3 = \theta_1$; M_1, M_2, M_3 – компоненты управляющего момента; $\tilde{d}_j = d_j/(1 - \varepsilon)$, $\tilde{\kappa}_i = \kappa_i/(1 - \varepsilon)^2$, ($j = 1, 2$; $i = 1, 2, 3$), $d_1 = d/J_1$, $d_3 = d/J_3$, $d = J_2 - J_1 - J_3$; $\kappa_1 = 4(J_3 - J_2)/J_1$, $\kappa_2 = 3(J_3 - J_1)/J_2$, $\kappa_3 = (J_1 - J_2)/J_3$.

В векторно-матричных обозначениях дифференциальная система (5) может быть переписана в виде системы уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)} &= A_1 x^{(1)} + \tilde{B}_1, & x^{(1)} &= [x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3]^\top, \\ \dot{x}^{(2)} &= A_2 x^{(2)} + \tilde{B}_2, & x^{(2)} &= [x_2, \dot{x}_2]^\top. \end{aligned}$$

Здесь

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \tilde{\kappa}_1 & 0 & 0 & \tilde{d}_1 \\ 0 & \tilde{\kappa}_3 & -\tilde{d}_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{\kappa}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_1/J_1 \\ M_3/J_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M_2/J_2 \end{bmatrix}.$$

Далее рассмотрим задачу стабилизации относительного равновесия спутника, когда управляющие моменты имеют различную физическую природу, – управление при помощи магнитных катушек и управление моментами сил Лоренца.

2. Управление при помощи магнитных катушек

В этом случае компоненты управляющего момента $\mathbf{M}^{(1)}$ имеют вид

$$M_1^{(1)} = b_3 u_2 - b_2 u_3, \quad M_2^{(1)} = b_1 u_3 - b_3 u_1, \quad M_3^{(1)} = b_2 u_1 - b_1 u_2.$$

Собственные магнитные моменты, создаваемые магнитными катушками u_1, u_2, u_3 , служащие управлениями, формально независимы, однако компоненты

механического момента M_1, M_2, M_3 не являются независимыми (ранг матрицы коэффициентов при управлении равен двум). Матрица управляющих коэффициентов в рассматриваемой задаче не имеет полного ранга. Это является принципиальной трудностью, на что указывалось во многих работах. Поэтому без ограничения общности можно рассматривать только две компоненты собственного магнитного момента. Будем далее полагать, что $u_2 = 0$. Тогда

$$\dot{x}^{(1)} = A_1 x^{(1)} + B_1 u, \quad x^{(1)} = [x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3]^\top, \quad u = [u_1, u_3]^\top, \quad (6)$$

$$\dot{x}^{(2)} = A_2 x^{(2)} + B_2 u, \quad x^{(2)} = [x_2, \dot{x}_2]^\top, \quad (7)$$

$$B_1 = \mu_* \begin{bmatrix} O_2 \\ B_{11} \end{bmatrix}, \quad B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-b_2(\tau)}{J_1} \\ \frac{b_2(\tau)}{J_3} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \mu_* \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-b_3(\tau)}{J_2} & \frac{b_1(\tau)}{J_2} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $\mu_* = \frac{\mu_0}{\omega_0^2(1-\varepsilon)^2}$. Матрицы (8) коэффициентов при управлении содержат пять независимых функций $f(\tau) = [1, \cos \tau, \sin \tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau]^\top$. Эти функции подчиняются системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\dot{f} = S f$ пятого порядка ($m = 5$). Замена переменных $x = (f^\top \otimes E_n) y$ (где $\otimes$ — символ кронекеровского произведения [26]) приводит нестационарную систему (6), (7) к стационарной системе порядка $mn = 30$ [14, 15].

Замечание. Учет слагаемых с частотой 3 в выражении для индукции геомагнитного поля лишь увеличит порядок приведенных стационарных систем до 42, так как количество независимых функций будет $m = 7$.

В данном случае блочная структура системы (6), (7) позволяет привести ее к двум, связанным через управление, независимым стационарным системам порядка $N_1 = 12$ и $N_2 = 10$. Согласно [14, 25], преобразование

$$x^{(1)} = F_1^\top Y_1, \quad x^{(2)} = F_2^\top Y_2, \quad x^{(1)} = [x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3]^\top, \quad x^{(2)} = [x_2, \dot{x}_2]^\top,$$

(12×1) (10×1)

$$F_1^\top = f_1^\top \otimes E_4, \quad F_2^\top = f_2^\top \otimes E_2; \quad f_1^\top = [\cos \tau, \sin \tau, 1], \quad f_2^\top = [\cos \tau, \sin \tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, 1]$$

приводит исходную нестационарную систему (6), (7) к стационарной системе

$$\dot{Y} = GY + B_y u, \quad G = \text{diag}(G^{(1)}, G^{(2)}), \quad B_y = \begin{bmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$G^{(1)} = E_3 \otimes A^{(1)} - S_1 \otimes E_4, \quad G^{(2)} = E_5 \otimes A^{(2)} - S_2 \otimes E_2,$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} S_{11} & O_{12} \\ O_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} S_{11} & O_2 & O_{21} \\ O_2 & 2S_{11} & O_{21} \\ O_{12} & O_{12} & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \\ B_3^{(1)} \end{bmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} B_1^{(2)} \\ \dots \\ B_5^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$B_1^{(1)} = \mu_* \nu g_2^1 \begin{bmatrix} O_2 \\ I \end{bmatrix}, \quad B_2^{(1)} = \mu_* \nu h_2^1 \begin{bmatrix} O_2 \\ I \end{bmatrix}, \quad B_3^{(1)} = \mu_* \nu g_2^0 \begin{bmatrix} O_2 \\ I \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J_1} \\ \frac{1}{J_3} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1^{(2)} = \frac{\mu_0}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2g_1^1 & -h_1^1 \end{bmatrix}, \quad B_2^{(2)} = \frac{\mu_0}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2h_1^1 & g_1^1 \end{bmatrix},$$

$$B_3^{(2)} = \frac{\mu_0 \nu}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.5g_2^2 & -h_2^2 \end{bmatrix}, \quad B_4^{(2)} = \frac{\mu_0 \nu}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.5h_2^2 & g_2^2 \end{bmatrix}, \quad B_5^{(2)} = \frac{\mu_0 \nu}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.5g_2^0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее через E_m, O_{mn}, O_m обозначены единичные и нулевые матрицы размерности $m \times n$ и $m \times m$ соответственно.

Запишем систему (9) в виде пяти подсистем, связанных только через управления

$$\dot{Y}^{(i)} = G_i Y^{(i)} + H_i u \quad (i = 1, \dots, 5), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Y^{(1)} &= [y_1, \dots, y_8]^\top, \quad Y^{(2)} = [y_9, \dots, y_{12}]^\top, \quad Y^{(3)} = [y_{13}, \dots, y_{16}]^\top, \\ Y^{(4)} &= [y_{17}, \dots, y_{20}]^\top, \quad Y^{(5)} = [y_{21}, \dots, y_{22}]^\top, \\ G_1 &= \begin{bmatrix} G_{11} & -E_4 \\ E_4 & G_{11} \end{bmatrix}, \quad G_{11} = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ K_1 & D \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\kappa}_3 \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & \tilde{d}_{16} \\ -\tilde{d}_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \end{bmatrix}, \quad G_2 = G_{11}, \quad H_2 = B_3^{(1)}, \\ G_3 &= \begin{bmatrix} G_{31} & -E_2 \\ E_2 & G_{31} \end{bmatrix}, \quad G_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{\kappa}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \end{bmatrix}, \\ G_4 &= \begin{bmatrix} G_{31} & -2E_2 \\ 2E_2 & G_{31} \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} B_3^{(2)} \\ B_4^{(2)} \end{bmatrix}, \quad G_5 = G_{31}, \quad H_5 = B_5^{(2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений (G_5, H_5) относительно переменных y_{21}, y_{22} содержит лишь управление u_1 . Эта система управляема.

Рассмотрим системы уравнений относительно переменных $y_9, \dots, y_{20}$ при наличии только управления u_1 .

1) Система (G_2, H_2) управляема, если $d_1 \tilde{\kappa}_1 \neq 0$ (при наличии только управления u_3 условие управляемости $d_3 \tilde{\kappa}_3 \neq 0$).

2) Система (G_3, H_3) управляема, если $\tilde{\kappa}_2 + 1 \neq 0$ (при наличии только управления u_3 это условие управляемости сохраняется).

3) Система (G_4, H_4) по каждому из управлений управляема всегда.

Система (G_1, H_1) при $d = 0$ расщепляется на две подсистемы: для переменных y_1, y_3, y_5, y_7 с управлением u_3 , которая управляема, и для переменных y_2, y_4, y_6, y_8 , которая не является полностью управляемой.

Итак, условиями неуправляемости системы (11) при наличии одного управления являются следующие условия:

$$d_1 \tilde{\kappa}_1 = 0 \quad (d_3 \tilde{\kappa}_3 = 0); \quad \tilde{\kappa}_2 + 1 = 0; \quad d = 0.$$

Замечание. В работе [9], где использована дипольная модель геомагнитного поля, показано, что приведенная стационарная система при движении спутника по экваториальной орбите неуправляема.

3. Управление моментами, создаваемыми силами Лоренца

Момент лоренцевых сил относительно центра масс спутника определяется по формуле (3). Величины $v_1 = x_q$, $v_2 = y_q$, $v_3 = z_q$ (координаты центра электрического заряда относительно центра масс) рассматриваются как управляющие параметры. Выражения для линеаризованного момента в уравнениях (5) имеют вид

$$M_1^{(2)} = \mu_{**} (b_2 v_2 + b_3 v_3), \quad M_2^{(2)} = -\mu_{**} b_2 v_1, \quad M_3^{(2)} = -\mu_{**} b_3 v_1.$$

Здесь $\mu_{**} = q \cdot \mu_*$; выражения для b_i определены формулами (4).

Линеаризованные уравнения движения в этом случае (считаем, что $v_3 = 0$) имеют вид, аналогичный системе (6), (7):

$$\dot{x}^{(1)} = A_1 x^{(1)} + B_1 v, \quad x^{(1)} = [x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3]^\top, \quad v = [v_1, v_2]^\top, \quad (13)$$

$$\dot{x}^{(2)} = A_2 x^{(2)} + B_2 v, \quad x^{(2)} = [x_2, \dot{x}_2]^\top, \quad (14)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} O_2 \\ B_{11} \end{bmatrix}, \quad B_{11} = \mu_{k**}^0 \begin{bmatrix} 0 & b_2/J_1 \\ b_3/J_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = -\mu_{m*} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2/J_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Замена переменных

$$x^{(1)} = F_3^\top Y_1, \quad x^{(2)} = F_4^\top Y_2, \quad x^{(1)} = [x_1 x_3 \dot{x}_1 \dot{x}_3]^\top, \quad x^{(2)} = [x_2 \dot{x}_2]^\top,$$

$$F_3^\top = f_2^\top \otimes E_4, \quad F_4^\top = f_1^\top \otimes E_2$$

приводит систему (13), (14) к стационарной системе 26-го порядка

$$\dot{Y} = GY + B_y v, \quad G = \text{diag}(G^{(1)}, G^{(2)}), \quad B_y = \begin{bmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где

$$G^{(1)} = E_5 \otimes A^{(1)} - S_2 \otimes E_4, \quad G^{(2)} = E_3 \otimes A^{(2)} - S_1 \otimes E_2, \quad i = \overline{1, 5},$$

$$B^{(1)} = \mu_{**} \begin{bmatrix} B_1^{(1)} \\ \dots \\ B_5^{(1)} \end{bmatrix}, \quad B^{(2)} = \mu_{**} \begin{bmatrix} B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \\ B_3^{(2)} \end{bmatrix}, \quad B_i^{(1)} = \begin{bmatrix} O_2 \\ B_{i1}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad I_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_1} \\ -\frac{1}{J_3} & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$B_{11}^{(1)} = 2g_1^1 I_1, \quad B_{21}^{(1)} = 2h_1^1 I_1, \quad B_{31}^{(1)} = \frac{3}{2}\nu g_2^2 I_1, \quad B_{41}^{(1)} = \frac{3}{2}\nu h_2^2 I_1, \quad B_{51}^{(1)} = -\frac{3}{2}\nu \tilde{g}_2^0 I_1,$$

$$B_1^{(2)} = \frac{\nu g_2^1}{J_2} I_2, \quad B_2^{(2)} = \frac{\nu h_2^1}{J_2} I_2, \quad B_3^{(2)} = \frac{g_1^0}{J_2} I_2, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система (15), как и в случае использования магнитных катушек, состоит из пяти, связанных только через управление, подсистем (G_i, H_i) относительно переменных $y_1, \dots, y_8$; $y_9, \dots, y_{16}$; $y_{17}, \dots, y_{20}$; y_{25}, y_{26} :

$$G_1 = \begin{bmatrix} G_{11} & -E_4 \\ E_4 & G_{11} \end{bmatrix}, \quad H_1 = \mu_{**} \begin{bmatrix} O_2 \\ B_{11} \\ O_2 \\ B_{21} \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} G_{11} & -2E_4 \\ 2E_4 & G_{11} \end{bmatrix}, \quad H_2 = \mu_{**} \begin{bmatrix} O_2 \\ B_{31} \\ O_2 \\ B_{41} \end{bmatrix}, \quad G_3 = G_{11},$$

$$H_3 = \mu_{**} \begin{bmatrix} O_2 \\ B_{51} \end{bmatrix}, \quad G_4 = \begin{bmatrix} G_{31} & -E_2 \\ E_2 & G_{31} \end{bmatrix}, \quad H_4 = \mu_{**} \begin{bmatrix} B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \end{bmatrix}, \quad G_5 = G_{31}, \quad H_5 = \mu_{**} B_3^{(2)}.$$

Здесь G_{ij} и B_{ij} и $B_i^{(2)}$ определены формулами (12) и (16) соответственно.

Очевидно, что для управляемости систем (G_i, H_i) ($i = 4, 5, 6$) необходимо, чтобы $v_1 \neq 0$. В случае $v_1 = 0$ системы относительно переменных $y_{21}, \dots, y_{26}$, очевидно, неуправляемы. Системы (G_1, H_1) и (G_2, H_2) неуправляемы, если $\tilde{\kappa}_1 = \tilde{\kappa}_3$. Системы (G_3, H_3) и (G_4, H_4) неуправляемы, если $\tilde{\kappa}_2 + 1 = 0$.

В [11] показано, что если орбита экваториальная, то при использовании модели геомагнитного поля «прямой магнитный диполь» необходимым условием управляемости является наличие лоренцевых сил. Если используются только моменты, создаваемые магнитными катушками, система (6) стационарна и неуправляема.

В приложении рассмотрено применение предложенной методики в случае комбинированного управления при одновременном использовании двух управляющих моментов: $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(2)}$.

4. Алгоритм стабилизации положения относительного равновесия спутника

Алгоритм стабилизации построим на основе приведенных стационарных систем. Предположим, что стационарные системы управляемы. Управление сформируем в виде обратной связи с постоянными коэффициентами. Такое управление обеспечит асимптотическую устойчивость приведенной стационарной системы. Стабилизирующее управление $u(\tau)$ построим в виде обратной связи по состоянию

$$u = -K_y Y(\tau), \quad (17)$$

а матрицу коэффициентов управления $K_y = \text{const}$ выберем так, чтобы замкнутая система

$$\dot{Y} = (G - BK_y) Y$$

была асимптотически устойчивой.

Постоянную матрицу K_y можно выбрать, например, так, чтобы характеристический многочлен замкнутой системы совпал с любым наперед заданным многочленом n -ой степени с действительными коэффициентами. Другой вариант построения управления – выбор коэффициентов обратной связи из условия минимума квадратичного функционала

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^\infty [Y^\top(t) Q Y(t) + u^\top(t) R u(t)] dt. \quad (18)$$

Здесь Q и R – заданные неотрицательно и положительно определенные постоянные матрицы соответственно. Оптимальное управление имеет вид (17), где

$$K_y = R^{-1} B_y P.$$

Матрица P является положительно определенным решением матричного алгебраического уравнения Риккати

$$PG + G^\top P - PB_y R^{-1} B_y^\top P + Q = 0.$$

Синтезированное управляющее воздействие является функцией переменных $Y(\tau)$ стационарной системы более высокого порядка, чем исходная нестационарная система ($n = 6$). Для введения управления непосредственно в исходную систему следует выразить вектор $Y(\tau)$ через исходный вектор состояния $x(\tau)$ и некоторый дополнительный вектор. Размерность стационарной системы в случае использования моментов магнитных катушек $N_1 = 22$ и $N_2 = 26$ в случае использования моментов сил Лоренца. Введем дополнительные векторы $\xi^{(i)}$ ($\xi^{(1)} (16 \times 1)$ в первом случае и $\xi^{(2)} (20 \times 1)$ во втором). Тогда можно ввести ограниченные невырожденные преобразования

$$X^{(i)} = T^{(i)} Y^{(i)} \quad (i = 1, 2), \text{ где } X^{(i)} = \begin{bmatrix} x, \xi^{(i)} \end{bmatrix}^\top, \quad x = [x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3, x_2, \dot{x}_2]^\top.$$

Выражения для матриц $T^{(i)}$ приведены ниже.

Затем можно построить расширенную нестационарную систему относительно вектора $X^{(i)}$, включающую исходные системы (6), (7) или (13), (14) как подсистемы

$$\dot{X}^{(i)} = A_X X^{(i)} + B_X u, \quad (19)$$

и ввести управление, найденное для соответствующих стационарных систем, в виде

$$u = -K_Y^i T_i^{-1} X^{(i)}. \quad (20)$$

Расширенная нестационарная система (19), замкнутая управлением (20), имеет вид

$$\dot{X} = \left(\dot{T} + T(G - B_Y K_Y) \right) T^{-1} X. \quad (21)$$

Нестационарная система (21), в силу выбора коэффициентов управления и ограниченности преобразования T , асимптотически устойчива.

4.1. Преобразование уравнений в случае магнитного управления.

Построим преобразование $X = TY$ для управления магнитными катушками (верхний индекс для краткости опускаем). В этом случае вектор расширенной нестационарной системы X представим в виде совокупности векторов

$$X = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{bmatrix}, \quad X^{(1)} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \xi^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(1)}, \xi_{11}^{(1)}, \xi_{12}^{(1)} \end{bmatrix}^\top, \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} x^{(2)}, \xi_{21}^{(1)}, \xi_{22}^{(1)}, \xi_{23}^{(1)}, \xi_{24}^{(1)} \end{bmatrix}^\top, \\ \xi_{11}^{(1)}(4 \times 1), \xi_{12}^{(1)}(4 \times 1), \xi_{21}^{(1)}(2 \times 1), \xi_{22}^{(1)}(2 \times 1), \xi_{23}^{(1)}(2 \times 1), \xi_{24}^{(1)}(2 \times 1).$$

Дополнительные векторы можно построить различными способами, но так, чтобы матрица преобразования T была невырожденной и ограниченной. Матрицу $T = \text{diag}(T_1, T_2)$ можно сформировать, например, в виде

$$X = TY, \quad T_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} F_1^\top \\ P_{11}^\top \\ P_{12}^\top \end{bmatrix}, \quad T_{10 \times 10} = \begin{bmatrix} F_2^\top \\ P_{21}^\top \\ \dots \\ P_{24}^\top \end{bmatrix}, \quad (22) \\ P_{1j}^\top = F_1^\top H_1^j, \quad P_{2k}^\top = F_2^\top H_2^k \quad (j = 1, 2, \quad k = 1, \dots, 4), \\ F_1^\top = f_1^\top \otimes E_4, \quad F_2^\top = f_2^\top \otimes E_2; \quad f_1^\top = [\cos \tau, \sin \tau, 1], \quad f_2^\top = [\cos \tau, \sin \tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, 1], \\ H_1 = S_1^\top \otimes E_4, \quad H_2 = S_2^\top \otimes E_2.$$

В уравнениях (21) матрицы $\dot{T} = \text{diag}(\dot{T}_1, \dot{T}_2)$ представимы в виде

$$\dot{T}_1 = \begin{bmatrix} \dot{F}_1^\top \\ \dot{P}_{11}^\top \\ \dot{P}_{12}^\top \end{bmatrix}, \quad \dot{T}_2 = \begin{bmatrix} \dot{F}_2^\top \\ \dot{P}_{21}^\top \\ \dots \\ \dot{P}_{24}^\top \end{bmatrix}. \quad (23)$$

С учетом того, что $\dot{f}_i^\top = f_i^\top S_i$ ($i = 1, 2$), имеем

$$\dot{F}_1^\top = f_1^\top S_1^\top \otimes E_4, \quad \dot{P}_{11}^\top = \dot{F}_1^\top H_1, \quad \dot{P}_{12}^\top = \dot{F}_1^\top H_1^2, \\ \dot{F}_2^\top = f_2^\top S_1^\top \otimes E_2, \quad \dot{P}_{21}^\top = \dot{F}_2^\top H_2, \quad \dots, \quad \dot{P}_{24}^\top = \dot{F}_2^\top H_2^4.$$

Таким образом, все элементы замкнутой расширенной нестационарной системы определены.

4.2. Преобразование уравнений в случае лоренцева управления. Для управления при помощи моментов лоренцевых сил преобразование, приводящее систему (13), (14) к стационарным системам, имеет вид

$$X = TY, \quad T = \text{diag}(T_1, T_2), \quad T_1 = \begin{bmatrix} F_3^\top \\ P_{31}^\top \\ \dots \\ P_{34}^\top \end{bmatrix}_{20 \times 20}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} F_4^\top \\ P_{41}^\top \\ P_{42}^\top \end{bmatrix}_{6 \times 6}, \quad (24)$$

$$F_3^\top = f_2^\top \otimes E_4, \quad F_4^\top = f_1^\top \otimes E_2,$$

$$P_{3j}^\top = F_3^\top H_2^j, \quad P_{4k}^\top = F_4^\top H_1^\top \quad (j = 1, \dots, 4, k = 1, 2).$$

В этом случае блоки матрицы $\dot{T} = \text{diag}(\dot{T}_1, \dot{T}_2)$ в уравнениях (21) имеют вид

$$T_1 = \begin{bmatrix} \dot{F}_3^\top \\ \dot{P}_{31}^\top \\ \dots \\ \dot{P}_{34}^\top \end{bmatrix}_{20 \times 20}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} \dot{F}_4^\top \\ \dot{P}_{41}^\top \\ \dot{P}_{42}^\top \end{bmatrix}_{6 \times 6}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{F}_3^\top &= f_2^\top S_2^\top \otimes E_4, & \dot{P}_{31}^\top &= \dot{F}_3^\top H_2, & \dot{P}_{12}^\top &= \dot{F}_3^\top H_2^2, \\ \dot{F}_4^\top &= f_1^\top S_1^\top \otimes E_2, & \dot{P}_{41}^\top &= \dot{F}_4^\top H_1, & \dots, & \dot{P}_{44}^\top &= \dot{F}_4^\top H_1^4. \end{aligned}$$

Все элементы замкнутой расширенной нестационарной системы определены по формулам (21), (24), (25).

5. Компьютерное моделирование

Предложенные алгоритмы стабилизации имеют ряд достоинств:

- управление строится для приведенных стационарных систем в виде обратной связи с постоянными коэффициентами. Оно обеспечивает асимптотическую устойчивость стационарной системы;

- выбор коэффициентов обратной связи в законе управления стационарной системой осуществляется либо в соответствии со стандартной процедурой *LQR* (при этом требуется задать лишь параметры функционалов), либо путем назначения корней характеристического уравнения стационарной системы.

При выборе параметров управления следует учитывать ограничения, связанные с требованиями к технической реализации управления.

Здесь при моделировании выберем параметры функционала в оптимальном управлении такими, чтобы управляющие моменты в среднем были по модулю того же порядка, что и гравитационные моменты.

Задача стабилизации относительного равновесия моделировалась для случаев использования собственных магнитных моментов, создаваемых при помощи магнитных катушек, и моментов сил Лоренца.

Моделирование проведено при помощи стандартного пакета Matlab 7.1. Коэффициенты управления выбраны на основе стандартной программы *LQR* для соответствующих стационарных систем:

- 1) для управления магнитными катушками – (6), (7) порядка $N_1 = 22$;
- 2) при управления моментами сил Лоренца – (13), (14) порядка $N_2 = 26$.

Построенные управления введены в нестационарную систему (21) при помощи преобразований (22) и (24).

5.1. Моделирование в случае магнитного управления. Для случая использования магнитных катушек матрицы функционала (18) имеют вид $Q = \text{diag}(\gamma_1 E_{12}, \gamma_2 E_{10})$, $R = \beta E_2$. Начальные отклонения по углам $x_1(0) = x_3(0) = 0.15$, $x_2(0) = 0.16$; по скоростям $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_3(0) = 0.1$, $\dot{x}_2(0) = -0.1$.

На рис. 1, 2 представлено поведение координат, скоростей $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и управления $u(\tau)$ для спутника с тензором инерции $J = [5.8 \ 3.6 \ 2.5]$ кг · м² [28].

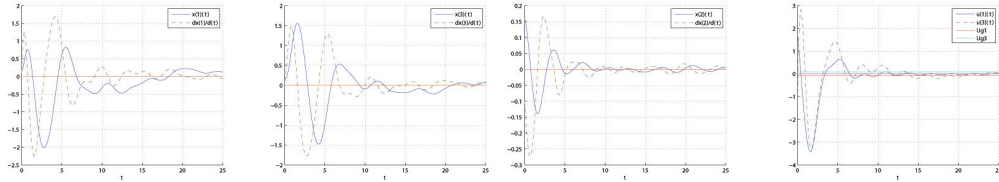


Рис. 1. Поведение переменных $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и $u(\tau)$: а) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; б) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; в) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; г) $u(\tau)$, $\gamma = 1.0$; $\beta = 1.0$

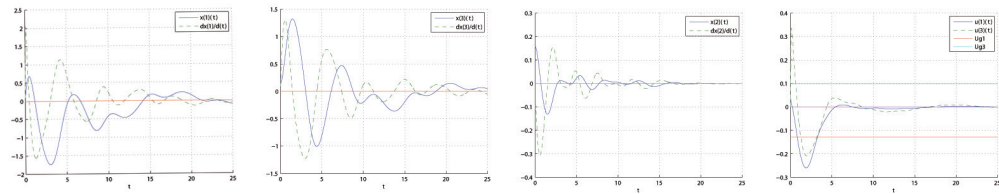


Рис. 2. Поведение переменных $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и $u(\tau)$: а) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; б) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; в) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; г) $u(\tau)$, $\gamma = 1.0$; $\beta = 100.0$

На рис. 1 г), 2 г) показано, как величина параметра β влияет на величину управления $u(\tau)$. На рис. 3, 4 показаны результаты моделирования процессов стабилизации для спутника с тензором инерции $J = [1600 \ 1000 \ 800]$ кг · м² [9, 25, 27].

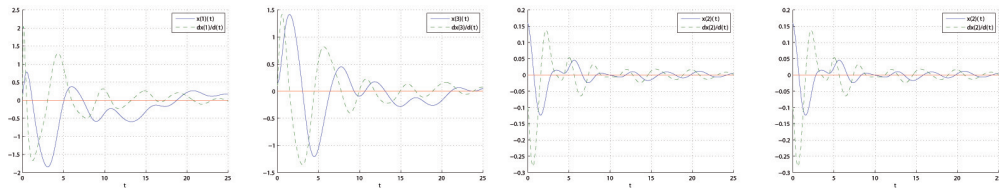


Рис. 3. Поведение переменных $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и $u(\tau)$: а) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; б) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; в) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; г) $u(\tau)$, $\gamma = 0.01$; $\beta = 0.01$

Увеличение параметра β позволило уменьшить величину управления, но время стабилизации при этом увеличилось.

5.2. Моделирование в случае лоренцева управления. В том случае, когда для управления используются моменты, создаваемые за счет сил Лоренца, действующих на заряженный экран спутника, матрицы функционала (18) имеют вид $Q = \text{diag}(\gamma_1 E_{20}, \gamma_2 E_6)$, $R = \beta E_2$. Начальные отклонения по углам $x_1(0) = x_3(0) = 0.15$, $x_2(0) = 0.16$; по скоростям $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_3(0) = \dot{x}_2(0) = -0.1$.

На рис. 5 представлено поведение координат, скоростей $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и управления $u(\tau)$ для спутника с тензором инерции $J = [5.8 \ 3.6 \ 2.5]$ кг · м² [27].

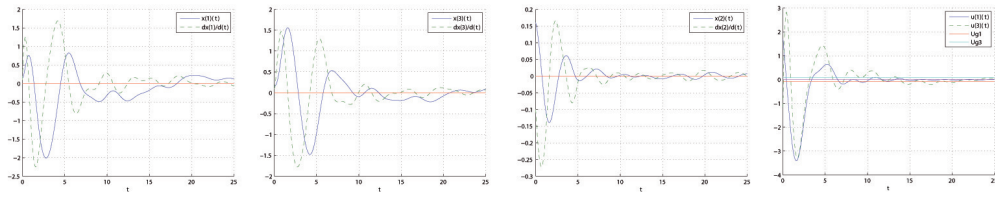


Рис. 4. Поведение переменных $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и $u(\tau)$: а) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; б) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; в) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; г) $u(\tau)$, $\gamma_1 = 0.1$, $\gamma_2 = 1.0$; $\beta = 100.0$

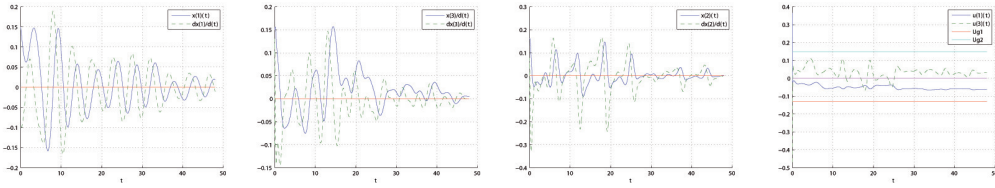


Рис. 5. Поведение переменных $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и $u(\tau)$: а) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; б) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; в) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; г) $u(\tau)$, $\gamma = 1.0$; $\beta = 5.0$

Для спутника с тензором инерции $J = [1600 \ 1000 \ 800]$ кг · м² [10, 25] поведение координат, скоростей $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и управления $u(\tau)$ представлено на рис. 6.

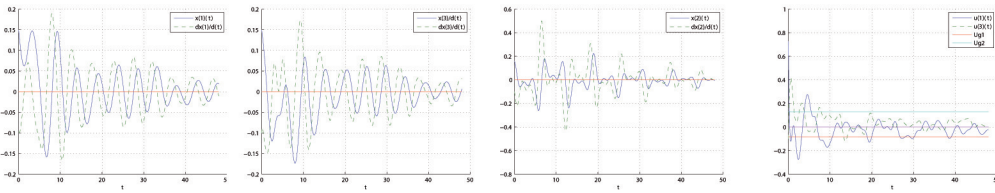


Рис. 6. Поведение переменных $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и $u(\tau)$: а) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; б) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; в) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; г) $u(\tau)$, $\gamma = 1.0$; $\beta = 5.0$

Проведенное математическое моделирование подтвердило эффективность предложенных алгоритмов стабилизации.

Заключение

Для достаточно полной модели геомагнитного поля исследована задача стабилизации положения относительного равновесия спутника в орбитальной системе координат как при использовании собственного магнитного момента спутника, так и момента сил Лоренца.

Предложен строгий аналитический подход к решению указанной задачи стабилизации, который позволяет синтезировать управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость рассматриваемого движения. Преимущество предлагаемого подхода заключается в его конструктивности и возможности алгоритмизации. Приведенные результаты компьютерного моделирования подтвердили эффективность предложенной методики.

Приложение

При комбинированном управлении, использующем одновременно возможности двух управляющих моментов – собственного магнитного момента и лоренцева момента, приведенная стационарная система имеет порядок $mn = 30$:

$$\dot{Z} = LZ + HU, \quad Z(30 \times 1), \quad U = [u_1 u_3 v_1 v_2]^T,$$

$$L = \text{diag}(\underset{(8 \times 8)}{\tilde{G}_1}, \underset{(8 \times 8)}{\tilde{G}_2}, \underset{(4 \times 4)}{\tilde{G}_3}, \underset{(4 \times 4)}{G_3}, \underset{(4 \times 4)}{G_4}, \underset{(2 \times 2)}{G_5}),$$

$$H = [H^{(1)T} H^{(2)T} H^{(3)T} H^{(4)T} H^{(5)T} H^{(6)T}]^T,$$

$$H^{(1)} = \begin{bmatrix} O_{24} \\ H_1^1 \\ O_{24} \\ H_2^1 \end{bmatrix}, \quad H_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \frac{\nu g_2^1}{J_1} & 0 & \mu_* \frac{\nu g_2^1}{J_1} \\ -\mu \frac{\nu g_2^1}{J_3} & 0 & -\mu_* \frac{2g_1^1}{J_3} & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & \mu \frac{\nu h_2^1}{J_1} & 0 & \mu_* \frac{\nu h_2^1}{J_1} \\ \mu \frac{\nu h_2^1}{J_3} & 0 & -\mu_* \frac{2h_1^1}{J_3} & 0 \end{bmatrix},$$

$$H^{(3)} = \begin{bmatrix} O_{24} \\ H_1^3 \end{bmatrix}, \quad H_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & \mu \frac{g_1^0}{J_1} & 0 & -\mu_* \frac{3\nu \tilde{g}_2^0}{2J_1} \\ -\mu \frac{g_1^0}{J_3} & 0 & \mu_* \frac{3\nu \tilde{g}_2^0}{2J_3} & 0 \end{bmatrix},$$

$$H^{(4)} = \frac{1}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\mu g_1^1 & -\mu h_1^1 & \mu_* \nu g_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\mu h_1^1 & \mu g_1^1 & \mu_* \nu h_2^1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H^{(5)} = \frac{-\mu \nu}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1, 5g_2^2 & h_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1, 5h_2^2 & -g_2^2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H^{(6)} = \frac{1}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1, 5\mu \nu g_2^0 & 0 & \mu_* g_1^0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00104, <https://rscf.ru/project/24-21-00104/>.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Антипов К.А., Тихонов А.А. Мультипольные модели геомагнитного поля: построение N-го приближения // Геомагн. аэрон. 2013. Т. 53, № 2. С. 271–281. <https://doi.org/10.7868/S0016794013020028>.
2. Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле // Итоги науки и техн. Сер. Современ. матем. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 220. С. 71–85. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-220-71-85>.
3. Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле // Итоги науки и техн. Сер. Современ. матем. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 221. С. 71–92. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-221-71-92>.

4. Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле // Итоги науки и техн. Сер. Современ. матем. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 222. С. 42–63. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-222-42-63>.
5. Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле // Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 223. С. 84–106. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-223-84-106>.
6. Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле // Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 224. С. 115–124. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-224-115-124>.
7. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С. Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников // Космич. апп. и технол. 2019. Т. 3, № 2. С. 73–86. <https://doi.org/10.26732/2618-7957-2019-2-73-86>.
8. Тихонов А.А. Уточнение модели «наклонный диполь» в задаче об эволюции вращательного движения заряженного тела в геомагнитном поле // Космич. исслед. 2002. Т. 40, № 2. С. 171–177.
9. Морозов В.М., Каленова В.И. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации // Космич. исслед. 2020. Т. 58, № 3. С. 199–207. <https://doi.org/10.31857/S0023420620030048>.
10. Kalenova V.I., Morozov V.M. Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces // Aerosp. Sci. Technol. 2020. V. 106. Art. 106105. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.106105>.
11. Морозов В.М., Каленова В.И. Стабилизация положения относительного равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов // Космич. исслед. 2021. Т. 59, № 5. С. 393–407. <https://doi.org/10.31857/S0023420621050058>.
12. Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов // ПММ. 2021. Т. 85, № 4. С. 436–453. <https://doi.org/10.31857/S003282352104010X>.
13. Морозов В.М., Каленова В.И. Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил // Космич. исслед. 2022. Т. 60, № 3. С. 246–253. <https://doi.org/10.31857/S0023420622030074>.
14. Каленова В.И., Морозов В.М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физматлит, 2010. 207 с.
15. Kalenova V.I., Morozov V.M., Rak M.G. On methodology for solving control problems of one class of time-varying systems // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, No 11. P. 4994–5000. <https://doi.org/10.1134/S1995080223110197>.
16. Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A. Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system // Adv. Space Res. 2018. V. 62, No 1. P. 142–151. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.04.006>.
17. Antipov K.A., Tikhonov A.A. On satellite electrodynamic attitude stabilization // Aerosp. Sci. Technol. 2014. V. 33, No 1. P. 92–99. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2014.01.004>.
18. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. 308 с.
19. Wertz J. (Ed.) Spacecraft Attitude Determination and Control. Ser.: Astrophysics and Space Science Library. V. 73. Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1978. xviii, 858 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-9907-7>.
20. Тихонов А.А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космич. исслед. 2003. Т. 41, № 1. С. 69–80.

21. Петров К.Г., Тихонов А.А. Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч. 2. Вычисление момента и оценки его составляющих // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1999. Вып. 3 (№ 15). С. 81–91.
22. Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A. Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite // *Aerosp. Sci. Technol.* 2020. V. 104. Art. 105963. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.105963>.
23. Nababi M., Barati M. Mathematical modeling and simulation of the Earth's magnetic field: A comparative study of the models on the spacecraft of attitude control application // *Appl. Math. Modell.* 2017. V. 46. P. 365–381. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.01.040>.
24. Alken P., Thébaud E., Beggan C.D., Amit H., Aubert J., Baerenzung J., Bondar T.N., Brown W.J., Califf S., Chambodut A., Chulliat A., Cox G.A., Finlay C.C., Fournier A., Gillet N., Grayver A., Hammer M.D., Holschneider M., Huder L., Hulot G., Jager T., Kloss C., Korte M., Kuang W., Kuvshinov A., Langlais B., L  ger J.-M., Lesur V., Livermore P.W., Lowes F.J., Macmillan S., Magnes W., Manda M., Marsal S., Matzka J., Metman M.C., Minami T., Morschhauser A., Mound J.E., Nair M., Nakano S., Olsen N., Pav  n-Carrasco F.J., Petrov V.G., Ropp G., Rother M., Sabaka T.J., Sanchez S., Saturnino D., Schnepf N.R., Shen X., Stolle C., Tangborn A., T  ffner-Clausen L., Toh H., Torta J.M., Varner J., Vervelidou F., Vigneron P., Wardinski I., Wicht J., Woods A., Yang Y., Zeren Z., Zhou B. International Geomagnetic Reference Field: The thirteenth generation // *Earth, Planets Space.* 2021. V. 73. Art. 49. <https://doi.org/10.1186/s40623-020-01288-x>.
25. Морозов В.М., Каленова В.И. Линейные нестационарные системы и стабилизация движения спутника около центра масс в геомагнитном поле. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2023. 174 с.
26. Brewer J.W. Kronecker products and matrix calculus in system theory // *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1978. V. 25, No 9. P. 772–781. <https://doi.org/10.1109/TCS.1978.1084534>.
27. Александров А.Ю., Тихонов А.А. Электродинамическое управление с распределенным запаздыванием для стабилизации ИСЗ на экваториальной орбите // *Космич. исслед.* 2022. Т. 60, № 5. С. 404–412. <https://doi.org/10.31857/S002342062204001X>.
28. Ovchinnikov M.Yu., Roldugin D.S., Penkov V.I. Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study // *Acta Astronaut.* 2015. V. 110. P. 279–286. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.11.030>.

Поступила в редакцию 15.07.2024

Принята к публикации 4.09.2024

Каленова Вера Ильинична, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник НИИ механики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия

E-mail: kalen@imec.msu.ru

Морозов Виктор Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета, главный научный сотрудник лаборатории навигации и управления НИИ механики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия

E-mail: moroz@imec.msu.ru

Тихонов Алексей Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики

Санкт-Петербургский государственный университет

Университетская наб., д. 7/9, г. Санкт-Петербург, 199034, Россия

E-mail: a.tikhonov@spbu.ru

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.499-517

The Problem of Satellite Attitude Stabilization in the Geomagnetic Field

V.I. Kalenova^{a*}, V.M. Morozov^{a**}, A.A. Tikhonov^{b***}^aMoscow State University, Moscow, 119991 Russia^bSt. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia

E-mail: *kalen@imec.msu.ru, **moroz@imec.msu.ru, ***a.tikhonov@spbu.ru

Received July 15, 2024; Accepted September 4, 2024

Abstract

A satellite moving along a circular Keplerian orbit in near-Earth space was explored, focusing on its attitude stabilization in the orbital coordinate system using the intrinsic magnetic and Lorentz force moments. Fluctuations in geomagnetic induction that occur as the satellite orbits cause the coefficients in the dynamical equations governing the satellite's attitude motion to vary over time. The results show that, although the linearized system of differential equations of the satellite's motion is non-stationary, it can be reduced to a stationary system of higher order, which holds even for high-precision multipole models of the geomagnetic field. Thus, a control law design was proposed to stabilize the satellite. The controllability of the system was analyzed, and an optimal stabilization algorithm based on the LQR method was developed. The effectiveness of the proposed approach was validated by computer modeling.

Keywords: satellite, satellite attitude stabilization, geomagnetic field, controllability, optimal control

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00104, <https://rscf.ru/project/24-21-00104/>).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Behavior of variables $x_i(\tau)$, $\dot{x}_i(\tau)$, and $u(\tau)$: a) $x_1(\tau)$, $\dot{x}_1(\tau)$; b) $x_3(\tau)$, $\dot{x}_3(\tau)$; c) $x_2(\tau)$, $\dot{x}_2(\tau)$; d) $u(\tau)$, $\gamma = 1.0$; $\beta = 1.0$.

Fig. 2. Behavior of variables $x_i(\tau)$, $\dot{x}_i(\tau)$, and $u(\tau)$: a) $x_1(\tau)$, $\dot{x}_1(\tau)$; b) $x_3(\tau)$, $\dot{x}_3(\tau)$; c) $x_2(\tau)$, $\dot{x}_2(\tau)$; d) $u(\tau)$, $\gamma = 1.0$; $\beta = 100.0$.

Fig. 3. Behavior of variables $x_i(\tau)$, $\dot{x}_i(\tau)$, and $u(\tau)$: a) $x_1(\tau)$, $\dot{x}_1(\tau)$; b) $x_3(\tau)$, $\dot{x}_3(\tau)$; c) $x_2(\tau)$, $\dot{x}_2(\tau)$; d) $u(\tau)$, $\gamma = 0.01$; $\beta = 0.01$.

Fig. 4. Behavior of variables $x_i(\tau)$, $\dot{x}_i(\tau)$, and $u(\tau)$: a) $x_1(\tau)$, $\dot{x}_1(\tau)$; b) $x_3(\tau)$, $\dot{x}_3(\tau)$; c) $x_2(\tau)$, $\dot{x}_2(\tau)$; d) $u(\tau)$, $\gamma_1 = 0.1$, $\gamma_2 = 1.0$; $\beta = 100.0$.

Fig. 5. Behavior of variables $x_i(\tau)$, $\dot{x}_i(\tau)$, and $u(\tau)$: a) $x_1(\tau)$, $\dot{x}_1(\tau)$; b) $x_3(\tau)$, $\dot{x}_3(\tau)$; c) $x_2(\tau)$, $\dot{x}_2(\tau)$; d) $u(\tau)$, $\gamma = 1.0$; $\beta = 5.0$.

Fig. 6. Behavior of variables $x_i(\tau)$, $\dot{x}_i(\tau)$, and $u(\tau)$: a) $x_1(\tau)$, $\dot{x}_1(\tau)$; b) $x_3(\tau)$, $\dot{x}_3(\tau)$; c) $x_2(\tau)$, $\dot{x}_2(\tau)$; d) $u(\tau)$, $\gamma = 1.0$; $\beta = 5.0$.

References

1. Antipov K.A., Tikhonov A.A. Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the N th approximation. *Geomagn. Aeron.*, 2013, vol. 53, no. 2, pp. 257–267. <https://doi.org/10.1134/S0016793213020023>.
2. Morozov V.M., Kalenova V.I., Rak M.G. Stabilization of stationary motions of a satellite near the center of mass in a geomagnetic field. *Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Ee Prilozh. Tematich. Obz.*, 2023, vol. 220, pp. 71–85. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-220-71-85>. (In Russian)
3. Morozov V.M., Kalenova V.I., Rak M.G. Stabilization of stationary motions of a satellite near the center of mass in a geomagnetic field. *Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Ee Prilozh. Tematich. Obz.*, 2023, vol. 221, pp. 71–92. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-221-71-92>. (In Russian)
4. Morozov V.M., Rak M.G., Kalenova V.I. Stabilization of stationary motions of a satellite near the center of mass in a geomagnetic field. *Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Ee Prilozh. Tematich. Obz.*, 2023, vol. 222, pp. 42–63. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-222-42-63>. (In Russian)
5. Morozov V.M., Kalenova V.I., Rak M.G. Stabilization of stationary motions of a satellite near the center of mass in a geomagnetic field. *Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Ee Prilozh. Tematich. Obz.*, 2023, vol. 223, pp. 84–106. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-223-84-106>. (In Russian)
6. Morozov V.M., Kalenova V.I., Rak M.G. Stabilization of stationary motions of a satellite near the center of mass in a geomagnetic field. *Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Ee Prilozh. Tematich. Obz.*, 2023, vol. 224, pp. 115–124. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-224-115-124>. (In Russian)
7. Ovchinnikov M.Yu., Roldugin D.S. Current algorithms for active magnetic attitude control of satellites. *Kosm. Appar. Tekhnol.*, 2019, vol. 3, no. 2, pp. 73–86. <https://doi.org/10.26732/2618-7957-2019-2-73-86>. (In Russian)
8. Tikhonov A.A. Refinement of the oblique dipole model in the evolution of rotary motion of a charged body in the geomagnetic field. *Cosmic Res.*, 2002, vol. 40, no. 2, pp. 157–162. <https://doi.org/10.1023/A:1015149420500>.
9. Morozov V.M., Kalenova V.I. Satellite control using magnetic moments: Controllability and stabilization algorithms. *Cosmic Res.*, vol. 58, no. 3, pp. 158–166. <https://doi.org/10.1134/S0010952520030041>.
10. Kalenova V.I., Morozov V.M. Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces. *Aerosp. Sci. Technol.*, 2020, vol. 106, art. 106105. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.106105>.
11. Kalenova V.I., Morozov V.M. Stabilization of satellite relative equilibrium using magnetic and Lorentzian moments. *Cosmic Res.*, 2021, vol. 59, no. 5, pp. 343–356. <https://doi.org/10.1134/S0010952521050051>.
12. Morozov V.M., Kalenova V.I., Rak M.G. On the stabilization of the regular precessions of satellites by means of magnetic moments. *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1486–1499. <https://doi.org/10.3103/S0025654421080136>.
13. Morozov V.M., Kalenova V.I. Stabilization of satellite relative equilibrium using magnetic moments and aerodynamic forces. *Cosmic Res.*, 2022, vol. 60, no. 3, pp. 213–219. <https://doi.org/10.1134/S0010952522030066>.
14. Kalenova V.I., Morozov V.M. *Lineinye nestatsionarnye sistemy i ikh prilozheniya k zadacham mekhaniki* [Linear Time-Varying Systems and Their Application to the Problems of Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2010. 207 p. (In Russian)
15. Kalenova V.I., Morozov V.M., Rak M.G. On methodology for solving control problems of one class of time-varying systems. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 11, pp. 4994–5000. <https://doi.org/10.1134/S1995080223110197>.

16. Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A. Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system. *Adv. Space Res.*, 2018, vol. 62, no. 1, pp. 142–151. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.04.006>.
17. Antipov K.A., Tikhonov A.A. On satellite electrodynamic attitude stabilization. *Aerosp. Sci. Technol.*, 2014, vol. 33, no. 1, pp. 92–99. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2014.01.004>.
18. Beletskii V.V. *Dvizhenie sputnika otnositel'no tsentra mass v gravitatsionnom pole* [Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass in the Gravitational Field]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 1975. 308 p. (In Russian)
19. Wertz J. (Ed.) *Spacecraft Attitude Determination and Control*. Ser.: Astrophysics and Space Science Library. Vol. 73. Dordrecht, D. Reidel Publ. Co., 1978. xviii, 858 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-9907-7>.
20. Tikhonov A.A. A method of semipassive attitude stabilization of a spacecraft in the geomagnetic field. *Cosmic Res.*, 2003, vol. 41, no. 1, pp. 63–73. <https://doi.org/10.1023/A:1022355730291>.
21. Petrov K.G., Tikhonov A.A. The moment of Lorentz forces acting on a charged satellite in the Earth's magnetic field. Part 2. the determination of the moment and estimations of its components. *Vestn. S.-Peterb. Univ. Ser. 1*, 1999, vol. 3, no. 15, pp. 81–91. (In Russian)
22. Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A. Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite. *Aerosp. Sci. Technol.*, 2020, vol. 104, art. 105963. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.105963>.
23. Nababi M., Barati M. Mathematical modeling and simulation of the Earth's magnetic field: A comparative study of the models on the spacecraft of attitude control application. *Appl. Math. Modell.*, 2017, vol. 46, pp. 365–381. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.01.040>.
24. Alken P., Thébaud E., Beggan C.D., Amit H., Aubert J., Baerenzung J., Bondar T.N., Brown W.J., Califf S., Chambodut A., Chulliat A., Cox G.A., Finlay C.C., Fournier A., Gillet N., Grayver A., Hammer M.D., Holschneider M., Huder L., Hulot G., Jager T., Kloss C., Korte M., Kuang W., Kuvshinov A., Langlais B., L  ger J.-M., Lesur V., Livermore P.W., Lowes F.J., Macmillan S., Magnes W., Manda E., Marsal S., Matzka J., Metman M.C., Minami T., Morschhauser A., Mound J.E., Nair M., Nakano S., Olsen N., Pav  n-Carrasco F.J., Petrov V.G., Ropp G., Rother M., Sabaka T.J., Sanchez S., Saturnino D., Schnepf N.R., Shen X., Stolle C., Tangborn A., T  ffner-Clausen L., Toh H., Torta J.M., Varner J., Vervelidou F., Vigneron P., Wardinski I., Wicht J., Woods A., Yang Y., Zeren Z., Zhou B. International Geomagnetic Reference Field: The thirteenth generation. *Earth, Planets Space*, 2021, vol. 73, art. 49. <https://doi.org/10.1186/s40623-020-01288-x>.
25. Morozov V.M., Kalenova V.I. *Lineinye nestatsionarnye sistemy i stabilizatsiya dvizheniya sputnika okolo tsentra mass v geomagnitnom pole* [Linear Time-Varying Systems and Stabilization of a Satellite near the Center of Mass in the Geomagnetic Field]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 2023. 174 p. (In Russian)
26. Brewer J.W. Kronecker products and matrix calculus in system theory. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1978, vol. 25, no. 9, pp. 772–781. <https://doi.org/10.1109/TCS.1978.1084534>.
27. Alexandrov A.Y., Tikhonov A.A. Electrodynamic control with distributed delay for AES stabilization in an equatorial orbit. *Cosmic Res.*, 2022, vol. 60, no. 5, pp. 366–374. <https://doi.org/10.1134/S0010952522040013>.

-
28. Ovchinnikov M.Yu., Roldugin D.S., Penkov V.I. Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study. *Acta Astronaut.*, 2015, vol. 110, pp. 279–286.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.11.030>.

Для цитирования: Каленова В.И., Морозов В.М., Тихонов А.А. Задача стабилизации углового движения спутника в геомагнитном поле // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 499–517.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.499-517>.

For citation: Kalenova V.I., Morozov V.M., Tikhonov A.A. The problem of satellite attitude stabilization in the geomagnetic field. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 499–517.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.499-517>. (In Russian)