

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.98

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.437-449

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Ю.Х. Эшкабилов¹, Ш.Д. Нодиров²

¹Ташкентский международный университет финансового управления и технологий,
г. Ташкент, 100025, Республика Узбекистан

²Каршинский государственный университет, г. Карши, 180119,
Республика Узбекистан

Аннотация

Исследованы положительные неподвижные точки интегральных операторов типа Гаммерштейна с вырожденным ядром в пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$. Задача о количестве положительных неподвижных точек интегрального оператора типа Гаммерштейна сведена к изучению положительных корней многочленов с вещественными коэффициентами. Рассмотрена модель на дереве Кэли с взаимодействиями ближайших соседей и множеством $[0, 1]$ значений спина. Доказана единственность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для данной модели.

Ключевые слова: неподвижная точка, интегральный оператор Гаммерштейна, дерево Кэли, мера Гиббса, трансляционно-инвариантная мера Гиббса

Введение

Хорошо известно, что интегральные уравнения имеют широкое применение в технике, механике, физике, экономике, оптимизации, автомобильном движении, биологии, теории массового обслуживания и т. д. (см. [1–5]). Теория интегральных уравнений быстро развивается с помощью инструментов функционального анализа, топологии и теории неподвижной точки. Поэтому для получения решения нелинейного интегрального уравнения используется множество различных методов. Некоторые методы обсуждения и получения решений интегрального уравнения Гаммерштейна можно найти в [6–14]. Существование положительных решений абстрактных интегральных уравнений типа Гаммерштейна обсуждается в [10].

Пусть $C_+[0, 1] = \{f(t) \in C[0, 1] : f(t) \geq 0\}$. Рассмотрим интегральный оператор типа Гаммерштейна H_k ($k \in \mathbb{N}$), действующий на конусе $C_+[0, 1]$ по правилу

$$(H_k f)(t) = \int_0^1 K(t, u) f^k(u) du, \quad (1)$$

где ядро $K(t, u)$ – строго положительная непрерывная функция на $[0, 1] \times [0, 1]$.

Существование нетривиальных положительных неподвижных точек оператора типа Гаммерштейна (1) следует из теоремы 44.8, приведенной в работе [4].

Настоящая работа посвящена изучению количества положительных неподвижных точек интегрального оператора типа Гаммерштейна с вырожденным ядром вида

$$K(t, u) = \varphi_1(t)\psi_1(u) + \varphi_2(t)\psi_2(u), \quad (2)$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ – попарно линейно независимые и положительные непрерывные функции.

Отметим, что при $k = 2, 3, 4$ получены результаты о количестве положительных неподвижных точек нелинейных интегральных операторов типа Гаммерштейна на H_2, H_3 и H_4 (см. [15–17]).

Краткое содержание этой статьи: в разделе 1 изучена разрешимость интегрального уравнения типа Гаммерштейна с вырожденным ядром (2) на конусе $C_+[0, 1]$

$$H_k f = f, \quad k > 1.$$

В разделе 2 рассмотрена система нелинейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Проблема разрешимости системы нелинейных алгебраических уравнений приведена к исследованию положительных корней полинома порядка $k + 1$. В разделе 3 представлены результаты, применимые к исследованию мер Гиббса для моделей на дереве Кэли Γ^k порядка $k \in \mathbb{N}$.

1. Интегральное уравнение типа Гаммерштейна с вырожденным ядром

В этом разделе обсуждено существование положительного решения интегрального уравнения типа Гаммерштейна с вырожденным ядром.

Обозначим $C_+[0, 1] = C_+[0, 1] \setminus \{\theta\}$, где $\theta(x) \equiv 0$ при всех $x \in [0, 1]$. Пусть функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ принадлежат $C_+[0, 1]$. Рассмотрим следующий интегральный оператор типа Гаммерштейна H_k , ($k \in \mathbb{N}$) на конусе $C_+[0, 1]$:

$$(H_k f)(t) = \int_0^1 (\varphi_1(t)\psi_1(u) + \varphi_2(t)\psi_2(u))f^k(u) du. \quad (3)$$

Целью работы является исследование количества положительных неподвижных точек интегрального оператора типа Гаммерштейна (3).

Определим положительные числа a_i и b_i следующим образом:

$$a_i = \int_0^1 \psi_1(u)\varphi_1^{k-i}(u)\varphi_2^i(u) du, \quad b_i = \int_0^1 \psi_2(u)\varphi_1^{k-i}(u)\varphi_2^i(u) du,$$

где $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$.

Рассмотрим отображение $\mathcal{Q}_k$ в двумерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{Q}_k(x, y) = \left(\sum_{i=0}^k C_k^i a_i x^{k-i} y^i, \sum_{i=0}^k C_k^i b_i x^{k-i} y^i \right),$$

где $C_k^i = \frac{k!}{(k-i)!i!}$ (биномиальный коэффициент).

Обозначим количество положительных неподвижных точек оператора T через $N_+^{fix}(T)$. Положим

$$\mathbb{R}_{>}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}.$$

Лемма 1. Пусть $k \geq 2$. Интегральный оператор типа Гаммерштейна (3) имеет нетривиальную положительную неподвижную точку тогда и только тогда, когда отображение $\mathcal{Q}_k$ имеет нетривиальную положительную неподвижную точку и справедливо равенство $N_+^{fix}(H_k) = N_+^{fix}(\mathcal{Q}_k)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(t) \in C_+^0[0, 1]$ – нетривиальная положительная неподвижная точка интегрального оператора типа Гаммерштейна (3). Введем следующие обозначения:

$$c_1 = \int_0^1 \psi_1(u) f^k(u) du, \quad (4)$$

$$c_2 = \int_0^1 \psi_2(u) f^k(u) du. \quad (5)$$

Ясно, что $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Тогда неподвижная точка интегрального оператора типа Гаммерштейна (3) имеет вид

$$f(t) = \phi_1(t)c_1 + \phi_2(t)c_2,$$

и также справедливо равенство $f(t) \in C_{>}[0, 1] = \{f(t) \in C[0, 1] : f(t) > 0, t \in [0, 1]\}$. Таким образом, для параметров c_1, c_2 из равенства (4) и (5) имеем следующие два тождества:

$$c_1 = \sum_{i=0}^k C_k^i a_i c_1^{k-i} c_2^i, \quad c_2 = \sum_{i=0}^k C_k^i b_i c_1^{k-i} c_2^i.$$

Следовательно, точка $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}_{>}^2$ является неподвижной точкой нелинейного оператора $\mathcal{Q}_k$.

Достаточность. Предположим, что точка $\omega = (x_0, y_0)$ является нетривиальной положительной неподвижной точкой нелинейного оператора $\mathcal{Q}_k$ и числа x_0, y_0 удовлетворяют равенствам

$$\sum_{i=0}^k C_k^i a_i x_0^{k-i} y_0^i = x_0, \quad \sum_{i=0}^k C_k^i b_i x_0^{k-i} y_0^i = y_0.$$

Легко проверить, что функция $f_0(t) = \phi_1(t)x_0 + \phi_2(t)y_0$ является неподвижной точкой интегрального оператора H_k (3) и $f_0(t) \in C_{>}[0, 1]$ при $\omega \in \mathbb{R}_{>}^2$.

Лемма доказана. $\square$

Теорема 1. Пусть $k \geq 2$. Количество положительных неподвижных точек нелинейного интегрального оператора типа Гаммерштейна (3) равно количеству положительных корней следующего многочлена

$$P_{k+1}(\xi) = a_k \xi^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{(k-i-1)!i!} \left(\frac{a_{k-i-1}}{i+1} - \frac{b_{k-i}}{k-i} \right) \xi^{k-i} - b_0.$$

Доказательство теоремы 1 следует из лемм 2 и 3 второго раздела. Из теоремы 1 и правила Декарта для количества положительных корней многочленов с вещественными коэффициентами (см. [18], сс. 27–29) следует следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $k \geq 2$.

1) Нелинейный интегральный оператор типа Гаммерштейна (3) имеет как минимум одну положительную неподвижную точку;

2) если для всех индексов $i \in \{1, \dots, k\}$ выполняются неравенства

$$\frac{a_{i-1}}{b_i} \leq \frac{k-i+1}{i} \quad \text{или} \quad \frac{a_{i-1}}{b_i} \geq \frac{k-i+1}{i},$$

то интегральный оператор типа Гаммерштейна (3) имеет единственную положительную неподвижную точку;

3) для количества $N_+^{fix}(H_k)$ положительных неподвижных точек интегрального оператора (3) выполняются следующие свойства:

а) если k счетно, то $1 \leq N_+^{fix}(H_k) \leq k+1$;

б) если k несчетно, то $1 \leq N_+^{fix}(H_k) \leq k$.

Доказательство. По теореме 1 для количества положительных неподвижных точек интегрального оператора (3) достаточно исследовать количество положительных корней многочлена P_{k+1} .

1) Видно, что $P_{k+1}(0) = -b_0 < 0$ и $P_{k+1}(+\infty) = +\infty$. Тогда по теореме Ролля существует такое $c > 0$, что $P_{k+1}(c) = 0$.

2) Согласно правилу Декарта число положительных корней многочлена P_{k+1} не превосходит числа перемен знака в последовательности коэффициентов

$$a_k, \quad k \left(a_{k-1} - \frac{b_k}{k} \right), \quad \frac{k(k-1)}{2} \left(\frac{a_{k-2}}{2} - \frac{b_{k-1}}{k-2} \right), \dots, -b_0.$$

Учитывая, что $a_k > 0$, $-b_0 < 0$, для единственности смены знака достаточно предположить, что все члены последовательности $\left\{ \frac{a_{i-1}}{k-i+1} - \frac{b_i}{i} \right\}_{i=1}^k$ не изменяют знаки.

3) Ясно, что многочлен P_{k+1} может иметь до $k+1$ положительных корней. Заметим, что если k несчетно, то многочлен P_{k+1} имеет один отрицательный корень. $\square$

Положим

$$d_i = \frac{a_{i-1}}{k-i+1} - \frac{b_i}{i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Следствие 1. Пусть $k \geq 2$.

а) Если для чисел $d_1, d_2, \dots, d_k$ справедливы соотношения $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_k$, то интегральный оператор типа Гаммерштейна (3) имеет единственную положительную неподвижную точку;

б) если для чисел $d_1, d_2, \dots, d_k$ справедливы соотношения $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k$, то для количества положительных неподвижных точек $N_+^{fix}(H_k)$ нелинейного интегрального оператора типа Гаммерштейна (3) выполняется неравенство $N_+^{fix}(H_k) \leq 3$.

Следствие 2. Пусть $k \geq 2$. Если существуют такие два положительных числа ξ_1 , и ξ_2 , что $P_{k+1}(\xi_1)P_{k+1}(\xi_2) \leq 0$, то $N_+^{fix}(H_k) \geq 2$.

2. Система нелинейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

В этом разделе мы изучим разрешимость системы нелинейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим следующую систему нелинейных алгебраических уравнений с неизвестными $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^k C_k^i a_i x^{k-i} y^i = x, \\ \sum_{i=0}^k C_k^i b_i x^{k-i} y^i = y, \end{cases}$$

где $a_i > 0$, $b_i > 0$ для всех $i = \overline{1, k}$.

Лемма 2. Если $\omega = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_>^2$ является неподвижной точкой оператора $\mathcal{Q}_k$, то $\xi_0 = \frac{y_0}{x_0}$ является корнем уравнения

$$a_k \xi^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{(k-i-1)!i!} \left(\frac{a_{k-i-1}}{i+1} - \frac{b_{k-i}}{k-i} \right) \xi^{k-i} - b_0 = 0. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $\omega = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_>^2$ – неподвижная точка оператора $\mathcal{Q}_k$. Тогда

$$\sum_{i=0}^k C_k^i a_i x_0^{k-i} y_0^i = x_0, \quad \sum_{i=0}^k C_k^i b_i x_0^{k-i} y_0^i = y_0.$$

Обозначив $y_0 = \xi_0 x_0$, получим следующие равенства

$$\sum_{i=0}^k C_k^i a_i x_0^{k-i} \xi_0^i x_0^i = x_0, \quad \sum_{i=0}^k C_k^i b_i x_0^{k-i} \xi_0^i x_0^i = \xi_0 x_0.$$

Следовательно, получим

$$x_0^k \left(\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i \right) = x_0, \quad x_0^k \left(\sum_{i=0}^k C_k^i b_i \xi_0^i \right) = \xi_0 x_0.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{\xi_0} = \sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i / \sum_{i=0}^k C_k^i b_i \xi_0^i,$$

или

$$a_k \xi_0^{k+1} + \sum_{i=1}^k (C_k^{i-1} a_{i-1} - C_k^i b_i) \xi_0^i - b_0 = 0.$$

После элементарных преобразований последнее равенство можно переписать в виде

$$a_k \xi_0^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{(k-i-1)!i!} \left(\frac{a_{k-i-1}}{i+1} - \frac{b_{k-i}}{k-i} \right) \xi_0^{k-i} - b_0 = 0.$$

Лемма 2 доказана. $\square$

Лемма 3. Если ξ_0 является положительным корнем уравнения (6), то точка $\omega_0 = (x_0, \xi_0 x_0) \in \mathbb{R}_{>}^2$ является неподвижной точкой оператора Q_k , где

$$x_0 = 1 / \sqrt[k-1]{\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i}. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $\xi_0 > 0$ и ξ_0 является положительным корнем уравнения (6). Положим $y_0 = \xi_0 x_0$ и $\omega_0 = (x_0, \xi_0 x_0)$. Из равенств $y_0 = \xi_0 x_0$ и (7) получим

$$\sum_{i=0}^k C_k^i a_i x_0^{k-i} y_0^i = \sum_{i=0}^k C_k^i a_i x_0^{k-i} (\xi_0 x_0)^i = x_0^k \left(\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i \right) = 1 / \sqrt[k-1]{\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i},$$

т. е. $\sum_{i=0}^k C_k^i a_i x_0^{k-i} y_0^i = x_0$. С другой стороны,

$$a_k \xi^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{(k-i-1)!i!} \left(\frac{a_{k-i-1}}{i+1} - \frac{b_{k-i}}{k-i} \right) \xi^{k-i} - b_0 = 0.$$

Тогда, заменив $j = k - i$, получим

$$\sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!j!} b_j \xi_0^j = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!j!} a_j \xi_0^{j+1} = \xi_0 \left(\sum_{j=0}^k C_k^j a_j \xi_0^j \right).$$

Из последнего равенства имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k C_k^i b_i x_0^{k-i} y_0^i &= \sum_{i=0}^k C_k^i b_i x_0^{k-i} (\xi_0 x_0)^i = x_0^k \left(\sum_{i=0}^k C_k^i b_i \xi_0^i \right) = \\ &= \left(1 / \sqrt[k-1]{\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i} \right)^k \left(\sum_{i=0}^k \frac{k!}{(k-i)!i!} b_i \xi_0^i \right) = \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt[k-1]{\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i} \right)^k} \xi_0 \left(\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i \right) = \frac{\xi_0}{\sqrt[k-1]{\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i}} = \xi_0 x_0 = y_0. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы 3. $\square$

3. Приложение: трансляционно-инвариантные меры Гиббса для моделей на дереве Кэли Γ^k

Дерево Кэли $\Gamma_k = (V, L)$ порядка $k \in \mathbb{N}$ – это бесконечное дерево, т. е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребро. Здесь V является множеством вершин, а L – множество ребер (дуг). Мы рассмотрим модель, где спинные переменные принимают значения из множества $[0, 1]$ и расположены на вершинах дерева Кэли Γ_k . Для $A \subset V$ конфигурация σ_A на A является произвольной функцией $\sigma_A : A \rightarrow [0, 1]$. Обозначим через $\Omega_A = [0, 1]^A$ множество

всех конфигураций на A . Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \mapsto \sigma(x) \in [0, 1]$; множество всех конфигураций совпадает с $[0, 1]^V$.

Рассмотрим модель H на Γ^k по равенству

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \xi_{\sigma(x), \sigma(y)}, \quad \sigma \in \Omega_V, \quad (8)$$

где $J \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\xi : (u, v) \in [0, 1]^2 \rightarrow \xi_{u, v} \in \mathbb{R}$ является ограниченной, измеримой функцией. Как обычно, $\langle x, y \rangle$ представляет ближайшие соседние вершины.

Говорят, что $x < y$, если путь из x^0 в y проходит через x . При этом вершина y называется «прямым потомком» вершины x , если $y > x$ и x, y являются ближайшими соседями. Множество прямых потомков вершин x обозначим как $S(x)$. Заметим, что любая вершина $x \neq x^0$ имеет k прямых потомков, а x^0 имеет $k + 1$ таковых.

Пусть $h : x \in V \mapsto h_x = (h_{t, x}, t \in [0, 1]) \in \mathbb{R}^{[0, 1]}$ является отображением вершины $x \in V \setminus \{x^0\}$.

Теперь рассмотрим следующее уравнение

$$f(t, x) = \prod_{y \in S(x)} \frac{\int_0^1 \exp(J\beta\xi_{tu}) f(u, y) du}{\int_0^1 \exp(J\beta\xi_{0u}) f(u, y) du}, \quad (9)$$

где $f(t, x) = \exp(h_{t, x} - h_{0, x})$, $t \in [0, 1]$, и $du = \lambda(du)$ – мера Лебега.

Известно, что для расщепленной меры Гиббса модели (8) необходимо и достаточно существование решения уравнения (9) для любого $x \in V \setminus \{x^0\}$. Таким образом, мы знаем, что мера Гиббса μ для модели (8) зависит от функции $f(t, x)$ и каждая мера Гиббса соответствует решению $f(t, x)$ уравнения (9).

Подробное определение расщепления меры Гиббса для моделей с взаимодействиями ближайших соседей и континуальным множеством значений спина на дереве Кэли Γ^k приведено в [19–21]. В дальнейшем будем использовать название меры Гиббса вместо расщепления меры Гиббса.

Обратим внимание, что анализировать решения уравнений (9) сложно. Сложность зависит от заданной функции ξ – модели (8). Изучим меры Гиббса модели (9) в случае $f(t, x) = f(t)$ для всех $x \in S(x)$. Такая мера Гиббса называется трансляционно-инвариантной.

Для трансляционно-инвариантных функций уравнение (9) можно записать в виде

$$(R_k f)(t) := \left(\frac{\int_0^1 K(t, u) f(u) du}{\int_0^1 K(0, u) f(u) du} \right)^k = f(t), \quad (10)$$

где $K(t, u) = \exp(J\beta\xi_{tu}) > 0$, $f(t) > 0$, $t, u \in [0, 1]$.

Отметим, что каждое положительное решение уравнения (10) соответствует трансляционно-инвариантной мере Гиббса для модели (9) (см. [22], замечание 3.3). Таким образом, количество положительных непрерывных решений уравнения (10) даст нам количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса.

Обобщив результаты работ [19, 22, 23], получим следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $k \geq 2$. Интегральное уравнение (10) имеет нетривиальное положительное решение тогда и только тогда, когда интегральный оператор (1) имеет нетривиальную положительную неподвижную точку и $N_{>}^{fix}(R_k) = N_{>}^{fix}(H_k)$.

Доказательство. Уравнение (10) имеет по крайней мере одно решение на $C_+^0[0, 1]$ (см. [23], теорема 3.5).

Необходимость. Предположим, что $k \geq 2$ и функция $f(t) \in C_+^0[0, 1]$ является решением уравнения (10). Тогда $f(0) = 1$, и также для

$$g(t) = \frac{\sqrt[k]{f(t)}}{\sqrt[k-1]{\lambda}}$$

выполняется

$$(H_k g)(t) = g(t),$$

где $\lambda = \int_0^1 K(0, u)f(u)du > 0$. Это указывает, что если уравнение (10) имеет решение на $C_+^0[0, 1]$, то соответственно найдется неподвижная точка оператора H_k на $C_+^0[0, 1]$.

Достаточность. Пусть $k \geq 2$ и функция $g = g(t) \in C_+^0[0, 1]$ является неподвижной точкой оператора H_k . Из строгой положительности ядер получим соотношение $\int_0^1 K(0, u)g^k(u)du = g(0) > 0$. Тогда для функции

$$f(t) = \left(\frac{g(t)}{g(0)} \right)^k$$

справедливо следующее равенство

$$(R_k f)(t) = \left(\frac{\int_0^1 K(t, u)f(u)du}{\int_0^1 K(0, u)f(u)du} \right)^k = \left(\frac{\int_0^1 K(t, u)g^k(u)du}{\int_0^1 K(0, u)g^k(u)du} \right)^k = \left(\frac{g(t)}{g(0)} \right)^k = f(t).$$

Это показывает, что если оператор H_k (1) имеет неподвижную точку на $C_+^0[0, 1]$, то уравнение (10) имеет решение на $C_+^0[0, 1]$. □

Учитывая теорему 3, имеем следующее следствие.

Следствие 3. Пусть $k \geq 2$. Для количества $N^{tigm}(H)$ трансляционно-инвариантных мер Гиббса модели (8) справедливо равенство

$$N^{tigm}(H) = N_+^{fix}(H_k).$$

Рассмотрим трансляционно-инвариантные меры Гиббса для следующей модели на дереве Кэли Γ^k :

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \ln(a + b\sigma(x)\sigma(y)), \quad (11)$$

где параметры a и b удовлетворяют условиям $a > 0$, $b > 0$ и $\beta = T^{-1}$, T – температура, $T > 0$.

Теорема 4. Модель (11) имеет единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса для всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Для ядра $K(t, u)$ интегрального оператора Гаммерштейна H_k имеем

$$\varphi_1(t) = 1, \quad \psi_1(t) = a, \quad \varphi_2(t) = t, \quad \psi_2(t) = bt.$$

Таким образом, нам необходимо рассмотреть следующий оператор типа Гаммерштейна:

$$(H_k f)(t) = \int_0^1 (a + btu) f^k(u) du. \quad (12)$$

Следовательно, для a_i и b_i получим (см. раздел 1)

$$a_i = a \int_0^1 u^i du = \frac{a}{i+1}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, k\},$$

$$b_i = b \int_0^1 u^{i+1} du = \frac{b}{i+2}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}.$$

Положим

$$d_i = \frac{a_{i-1}}{k-i+1} - \frac{b_i}{i} = \frac{1}{i} \left(\frac{a}{k-i+1} - \frac{b}{i+2} \right), \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Определим функцию

$$h(x) = \frac{a}{k-x+1} - \frac{b}{x+2}$$

на $[1, k]$. Тогда имеем

$$h'(x) = \frac{a}{(k-x+1)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}, \quad x \in [1, k].$$

Отсюда получим $h'(x) > 0$ для всех $x \in [1, k]$. Следовательно, функция $h(x)$ возрастает на множестве $[1, k]$. Таким образом, для чисел $d_1, d_2, \dots, d_k$ имеем следующие неравенства

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_k.$$

Тогда по теореме 2 интегральный оператор (12) имеет единственную положительную неподвижную точку. Это означает, что модель (11) имеет единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса для всех $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. *Abdou M.A., Badr A.A.* On a method for solving an integral equation in the displacement contact problem // J. Appl. Math. Comput. 2002. V. 127, No 1. P. 65–78. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(01\)00003-0](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(01)00003-0).
2. *Grimmer R., Liu J.H.* Singular perturbations in viscoelasticity // Rocky Mt. J. Math. 1994. V. 24, No 1. P. 61–75. <https://doi.org/10.1216/rmj/1181072452>.
3. *Keller J.B., Olmstead W.E.* Temperature of nonlinearly radiating semi-infinite solid // Q. Appl. Math. 1972. V. 29. P. 559–566.

4. *Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P.* Geometrical Methods of Nonlinear Analysis. Ser.: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. V. 263. Berlin, Heidelberg, New York, NY, Tokyo: Springer-Verlag, 1984. xx, 412 p.
5. *Olmstead W.E., Handelsman R.A.* Diffusion in a semi-infinite region with nonlinear surface dissipation // SIAM Rev. 1976. V. 18, No 2. P. 275–291.
<https://doi.org/10.1137/1018044>.
6. *Abdou M.A.* On the solution of linear and nonlinear integral equation. // J. Appl. Math. Comput. 2003. V. 146, No 2–3. P. 857–871.
[https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(02\)00643-4](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00643-4).
7. *Abdou M.A., El-Borai M.M., El-Kojok M.M.* Toeplitz matrix method and nonlinear integral equation of Hammerstein type // J. Comput. Appl. Math. 2009. V. 223, No 2. P. 765–776. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.02.012>.
8. *Abdou M.A., El-Sayed W.G., Deeb E.I.* A solution of nonlinear integral equation // Appl. Math. Comput. 2005. V. 160, No 1. P. 1–14.
[https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(03\)00613-1](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00613-1).
9. *Faraci F.* Existence and multiplicity results for a non linear Hammerstein integral equation // Giannessi F., Maugeri A. (Eds.) Variational Analysis and Applications. Ser.: Nonconvex Optimization and Its Applications. V. 79. Boston, MA: Springer, 2005. P. 359–371. https://doi.org/10.1007/0-387-24276-7_23.
10. *Horvat-Marc A.* Positive solutions for nonlinear integral equations of Hammerstein type // Carpathian J. Math. 2008. V. 24, No 2. P. 54–62.
11. *Appell J.A., De Pascale E., Zabrejko P.P.* On the unique solvability of Hammerstein integral equations with non-symmetric kernels // Appell J. (Ed.) Recent Trends in Nonlinear Analysis. Ser.: Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. V. 40. Basel: Birkhäuser, 2000. P. 27–34.
https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8411-2_3.
12. *Appell J., Kalitvin A.S.* Existence results for integral equations: Spectral methods vs. fixed point theory // Fixed Point Theory. 2006. V. 7, No 2. P. 219–234.
13. *Bugajewski D.* On BV-solutions of some nonlinear integral equations // Integr. Equations Oper. Theory. 2003. V. 46, No 4. P. 387–398. <https://doi.org/10.1007/s00020-001-1146-8>.
14. *Milojević P.S.* Solvability and the number of solutions of Hammerstein equations // Electron. J. Differ. Equations. 2004. No 54. P. 1–25.
15. *Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D., Haydarov F.H.* Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs measures // Positivity. 2016. V. 20, No 4. P. 929–943.
<https://doi.org/10.1007/s11117-015-0394-9>.
16. *Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D.* Positive fixed points of cubic operators on $\mathbb{R}^2$ and Gibbs measures // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2019. V. 12, No 6. P. 663–673.
<http://dx.doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-6-663-673>.
17. *Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D.* On the positive fixed points of quartic operators // Bull. Inst. Math. 2020. No 3. P. 27–36.
18. *Prasolov V.V.* Polynomials. Ser.: Algorithms and Computation in Mathematics. V. 11. Springer, 2000. xiii, 301 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03980-5>.
19. *Rozikov U.A., Eshkabilov Yu.Kh.* On models with uncountable set of spin values on a Cayley tree: Integral equations // Math. Phys., Anal. Geom. 2010. V. 13, No 3. P. 275–286.
<https://doi.org/10.1007/s11040-010-9079-6>.
20. *Rozikov U.A.* Gibbs Measures on Cayley Trees. Singapore: World Sci. Publ., 2013. 404 p.
<https://doi.org/10.1142/8841>.
21. *Georgii H.-O.* Gibbs Measures and Phase Transitions. Ser.: De Gruyter Studies in Mathematics. V. 9. Berlin, New York, NY: De Gruyter, 2011. 545 p.
<https://doi.org/10.1515/9783110250329>.

22. *Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H., Rozikov U.A.* Non-uniqueness of Gibbs measure for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree // J. Stat. Phys. 2012. V. 147, No 4. P. 779–794. <https://doi.org/10.1007/s10955-012-0494-x>.
23. *Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H., Rozikov U.A.* Uniqueness of Gibbs measure for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree // Math. Phys., Anal. Geom. 2013. V. 16, No 1. P. 1–17. <https://doi.org/10.1007/s11040-012-9118-6>.

Поступила в редакцию 19.07.2024

Принята к публикации 6.08.2024

Эшкабиллов Юсуп Халбаевич, доктор физико-математических наук, профессор

Ташкентский международный университет финансового управления и технологий
просп. Амира Темура, д. 15, г. Ташкент, 100025, Республика Узбекистан
E-mail: yusup62@mail.ru

Нодиров Шохрух Дилмуродович, доктор философии по физико-математическим наукам (PhD), доцент, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений

Каршинский государственный университет
ул. Кучабаг, д. 17, г. Карши, 180119, Республика Узбекистан
E-mail: shoh0809@mail.ru

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 3, pp. 437–449

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.437-449

Positive Fixed Points of Hammerstein Integral Operators with Degenerate Kernel

Yu.Kh. Eshkabilov^{a}, Sh.D. Nodirov^{b**}*

^a*Tashkent International University of Financial Management and Technologies,
Tashkent, 100025 Republic of Uzbekistan*

^b*Karshi State University, Karshi, 180119 Republic of Uzbekistan*

E-mail: *yusup62@mail.ru, **shoh0809@mail.ru

Received July 19, 2024; Accepted August 6, 2024

Abstract

Positive fixed points of the Hammerstein integral operators with a degenerate kernel in the space of continuous functions $C[0, 1]$ were explored. The problem of determining the number of positive fixed points of the Hammerstein integral operator was reduced to analyzing the positive roots of polynomials with real coefficients. A model on a Cayley tree with nearest-neighbor interactions and with the set $[0, 1]$ of spin values was considered. It was proved that a unique translation-invariant Gibbs measure exists for this model.

Keywords: fixed point, Hammerstein integral operator, Cayley tree, Gibbs measure, translation-invariant Gibbs measure

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Abdou M.A., Badr A.A. On a method for solving an integral equation in the displacement contact problem. *J. Appl. Math. Comput.*, 2002, vol. 127, no. 1, pp. 65–78.
[https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(01\)00003-0](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(01)00003-0).
2. Grimmer R., Liu J.H. Singular perturbations in viscoelasticity. *Rocky Mt. J. Math.*, 1994, vol. 24, no. 1, pp. 61–75. <https://doi.org/10.1216/rmjm/1181072452>.
3. Keller J.B., Olmstead W.E. Temperature of nonlinearly radiating semi-infinite solid. *Q. Appl. Math.*, 1972, vol. 29, pp. 559–566.
4. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P. *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*. Ser.: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Vol. 263. Berlin, Heidelberg, New York, NY, Tokyo, Springer-Verlag, 1984. xx, 412 p.
5. Olmstead W.E., Handelsman R.A. Diffusion in a semi-infinite region with nonlinear surface dissipation. *SIAM Rev.*, 1976, vol. 18, no. 2, pp. 275–291.
<https://doi.org/10.1137/1018044>.
6. Abdou M.A. On the solution of linear and nonlinear integral equation. *J. Appl. Math. Comput.*, 2003, vol. 146, nos. 2–3, pp. 857–871.
[https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(02\)00643-4](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00643-4).
7. Abdou M.A., El-Borai M.M., El-Kojok M.M. Toeplitz matrix method and nonlinear integral equation of Hammerstein type. *J. Comput. Appl. Math.*, 2009, vol. 223, no. 2, pp. 765–776. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.02.012>.
8. Abdou M.A., El-Sayed W.G., Deeb E.I. A solution of nonlinear integral equation. *Appl. Math. Comput.*, 2005, vol. 160, no. 1, pp. 1–14.
[https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(03\)00613-1](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00613-1).
9. Faraci F. Existence and multiplicity results for a non linear Hammerstein integral equation. In: Giannesi F., Maugeri A. (Eds.) *Variational Analysis and Applications*. Ser.: Nonconvex Optimization and Its Applications. Vol. 79. Boston, MA, Springer, 2005, pp. 359–371. https://doi.org/10.1007/0-387-24276-7_23.
10. Horvat-Marc A. Positive solutions for nonlinear integral equations of Hammerstein type. *Carpathian J. Math.*, 2008, vol. 24, no. 2, pp. 54–62.
11. Appell J.A., De Pascale E., Zabrejko P.P. On the unique solvability of Hammerstein integral equations with non-symmetric kernels. In: Appell J. (Ed.) *Recent Trends in Nonlinear Analysis*. Ser.: Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Vol. 40. Basel, Birkhäuser, 2000, pp. 27–34.
https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8411-2_3.
12. Appell J., Kalitvin A.S. Existence results for integral equations: Spectral methods vs. fixed point theory. *Fixed Point Theory*, 2006, vol. 7, no. 2, pp. 219–234.
13. Bugajewski D. On BV-solutions of some nonlinear integral equations. *Integr. Equations Oper. Theory*, 2003, vol. 46, no. 4, pp. 387–398.
<https://doi.org/10.1007/s00020-001-1146-8>.
14. Milojević P.S. Solvability and the number of solutions of Hammerstein equations. *Electron. J. Differ. Equations*, 2004, no. 54, pp. 1–25.
15. Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D., Haydarov F.H. Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs measures. *Positivity*, 2016, vol. 20, no. 4, pp. 929–943.
<https://doi.org/10.1007/s11117-015-0394-9>.
16. Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D. Positive fixed points of cubic operators on $\mathbb{R}^2$ and Gibbs measures. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2019, vol. 12, no. 6, pp. 663–673.
<http://dx.doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-6-663-673>.

17. Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D. On the positive fixed points of quartic operators. *Bull. Inst. Math.*, 2020, no. 3, pp. 27–36.
18. Prasolov V.V. *Polynomials*. Ser.: Algorithms and Computation in Mathematics. Vol. 11. Springer, 2000. xiii, 301 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03980-5>.
19. Rozikov U.A., Eshkabilov Yu.Kh. On models with uncountable set of spin values on a Cayley tree: Integral equations. *Math. Phys., Anal. Geom.*, 2010, vol. 13, no. 3, pp. 275–286. <https://doi.org/10.1007/s11040-010-9079-6>.
20. Rozikov U.A. *Gibbs Measures on Cayley Trees*. Singapore, World Sci. Publ., 2013. 404 p. <https://doi.org/10.1142/8841>.
21. Georgii H.-O. *Gibbs Measures and Phase Transitions*. Ser.: De Gruyter Studies in Mathematics. Vol. 9. Berlin, New York, NY, De Gruyter, 2011. 545 p. <https://doi.org/10.1515/9783110250329>.
22. Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H., Rozikov U.A. Non-uniqueness of Gibbs measure for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree. *J. Stat. Phys.*, 2012, vol. 147, no. 4, pp. 779–794. <https://doi.org/10.1007/s10955-012-0494-x>.
23. Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H., Rozikov U.A. Uniqueness of Gibbs measure for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree. *Math. Phys., Anal. Geom.*, 2013, vol. 16, no. 1, pp. 1–17. <https://doi.org/10.1007/s11040-012-9118-6>.

⟨ **Для цитирования:** Эшкабиллов Ю.Х., Нодиров Ш.Д. Положительные неподвижные точки интегральных операторов типа Гаммерштейна с вырожденным ядром // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 437–449. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.437-449>. ⟩

⟨ **For citation:** Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D. Positive fixed points of Hammerstein integral operators with degenerate kernel. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 437–449. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.437-449>. (In Russian) ⟩