

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.426-436

КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК С ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССОЙ

Л.У. Султанов^{1,2}, И.Р. Гарифуллин¹

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет,
г. Казань, 420008, Россия

²Федеральный исследовательский центр “Казанский научный центр РАН”,
г. Казань, 420111, Россия

Аннотация

Решена задача о колебании пластин и оболочек с массой, присоединенной в точке. При построении математической модели использована гипотеза недеформируемых нормалей, на основе которой выведена система разрешающихся динамических уравнений оболочки с массой, где неизвестными являются прогиб и функция напряжения. Задача решена численно-аналитически. В соответствии с граничными условиями прогиб оболочки представлен в виде двойных тригонометрических рядов. Переход от исходной динамической системы к решению конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений осуществлен с помощью метода Бубнова – Галеркина. Для интегрирования по времени применен метод конечных разностей.

Ключевые слова: пластина, оболочка, присоединенная масса, метод конечных разностей, метод Бубнова – Галеркина

Введение

Тонкостенные конструкции имеют широкое применение в различных областях промышленности, таких как автомобильная, аэрокосмическая, ракетная, машиностроительная, судостроительная и т. п. Такие конструкции обычно подвергаются действию интенсивных динамических нагрузок, что обуславливает появление в них больших циклических напряжений, иногда приводящих к колебательной потере устойчивости, возникновению сложных нестационарных процессов, нежелательных с точки зрения динамической прочности и надежности конструкций [1]. Следует отметить, что колебания всех реальных конструкций, по существу, нелинейны. Кроме того, реальные тонкостенные конструктивные элементы характеризуются различными включениями типа присоединенной массы [2–8]. В результате математическое моделирование динамики пластин и оболочек ведет к решению нелинейных дифференциальных уравнений, которые могут быть решены различными приближенными методами (Бубнова – Галеркина, Ритца, конечных разностей и др.).

Настоящая работа посвящена анализу геометрически нелинейных колебаний тонкостенных оболочек с массой, присоединенной в точке. Для описания поведения оболочки использована математическая модель с применением гипотезы

недеформируемых нормалей (гипотеза Кирхгофа – Лява). Записана система разрешающихся динамических уравнений оболочки с массой, где неизвестными являются динамический прогиб и функция напряжения. Задача решена численно-аналитически. Переход от исходной динамической системы к конечной системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений осуществлен с помощью метода Бубнова – Галеркина. Для решения полученной системы уравнений применен метод центральных разностей.

Приведены результаты численных расчетов: в задаче о нелинейных колебаниях шарнирно опертой по всем краям прямоугольной пластины с массой, присоединенной в точке, и в задаче о нелинейных колебаниях шарнирно опертой по торцам замкнутой круговой цилиндрической оболочки с массой, присоединенной в точке. В соответствии с граничными условиями прогиб оболочки представлен в виде двойных тригонометрических рядов. Получены графики зависимостей от времени прогибов и изгибных форм. Эффект присоединенной массы выражается в появлении качественно новых (по сравнению с незагруженной оболочкой) видов динамических деформаций, которые являются следствием возбуждения и взаимодействия различных изгибных форм совокупной упругой колебательной системы оболочка – масса.

1. Постановка задачи. Метод решения

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях тонких оболочек с включениями типа сосредоточенной массы. Используем гипотезу Кирхгофа – Лява. При выводе уравнений инерцию поворота массы не учитываем, а силу инерции массы считаем направленной по нормали к поверхности. Предполагаем также, что в оболочке отсутствуют упругие волны.

Пусть в некоторой точке к оболочке присоединена масса M , действие которой на срединную поверхность оболочки заменим сосредоточенной силой. Такую же силу, представляющую собой реакцию оболочки, считаем приложенной и к массе.

Запишем уравнение движения пологой оболочки и уравнение совместности деформации [1]:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w &= L(w, \Phi) + k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w) - k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right],$$

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – бигармонический оператор Лапласа; x_0, y_0 – координаты точки присоединения массы к оболочке; k_x, k_y – кривизны оболочки; $\delta(x, y)$ – двумерная δ -функция Дирака; $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ – цилиндрическая жесткость оболочки; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала оболочки; h – толщина оболочки; $w(x, y, t)$ – функция прогиба.

Система уравнений (1) описывает движение оболочки с массой M , присоединенной в точке. К ним должны быть добавлены граничные и начальные условия.

Решения полученной системы нелинейных уравнений будем отыскивать в два шага, интегрирование по пространственным координатам проведем с помощью метода Бубнова – Галеркина, а для интегрирования по времени используем метод конечных разностей.

Запишем систему уравнений (1) в операторном виде, добавив граничные условия:

$$\tilde{L}(w, t) = 0, \quad w|_{\Gamma} = 0,$$

где Γ – граница области. После применения метода Бубнова – Галеркина получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $f_i(t)$:

$$\left[\sum_{j=1}^N f_j(t) \phi_j(x, y) \right] \phi_i(x, y) dx dy = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

или

$$\left[\sum_{j=1}^N f_j(t) \phi_j(x, y) \right] \frac{\partial \tilde{w}}{\partial f_i} dx dy = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

где прогиб представлен в виде $\tilde{w} = \sum_{i=1}^N f_i(t) \phi_i(x, y)$, $f_i(t)$ – неизвестные коэффициенты, зависящие от времени t , а $\phi_i(x, y)$ – базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям и условию полноты на бесконечном наборе. Полученную систему уравнений решим с помощью метода центральных разностей [9].

2. Вычислительные эксперименты

2.1. Нелинейные колебания шарнирно опертой пластины. Рассмотрим прямоугольную пластину со сторонами a и b , шарнирно опертую по всем краям. Тогда система уравнений (1), описывающая движение, при $k_x = 0$, $k_y = 0$ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w &= L(w, \Phi) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w). \end{aligned} \quad (2)$$

Для этого случая граничные условия примут вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, a, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, b. \quad (3)$$

В соответствии с граничными условиями (3) и линейным решением [1] выберем функцию прогиба в виде

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (4)$$

Из второго уравнения системы (2), имея в виду (4), найдем выражение для функции напряжения

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{mnkj} \Phi_1^{mnkj} \cos \frac{m-k}{a} \pi x \cos \frac{n-j}{b} \pi y + \Phi_2^{mnkj} \cos \frac{m-k}{a} \pi x \cos \frac{n+j}{b} \pi y + \\ &+ \Phi_3^{mnkj} \cos \frac{m+k}{a} \pi x \cos \frac{n-j}{b} \pi y + \Phi_4^{mnkj} \cos \frac{m+k}{a} \pi x \cos \frac{n+j}{b} \pi y, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\Phi_1^{mnkj} = \frac{E}{4a^2b^2} \frac{W_{mn}W_{kj}mj(kn - mj)}{\left[\left(\frac{m-k}{a}\right)^2 + \left(\frac{n-j}{b}\right)^2\right]^2}, \quad \Phi_2^{mnkj} = \frac{E}{4a^2b^2} \frac{W_{mn}W_{kj}mj(kn + mj)}{\left[\left(\frac{m-k}{a}\right)^2 + \left(\frac{n+j}{b}\right)^2\right]^2},$$

$$\Phi_3^{mnkj} = \frac{E}{4a^2b^2} \frac{W_{mn}W_{kj}mj(kn + mj)}{\left[\left(\frac{m+k}{a}\right)^2 + \left(\frac{n-j}{b}\right)^2\right]^2}, \quad \Phi_4^{mnkj} = \frac{E}{4a^2b^2} \frac{W_{mn}W_{kj}mj(kn + mj)}{\left[\left(\frac{m+k}{a}\right)^2 + \left(\frac{n+j}{b}\right)^2\right]^2}.$$

Подставив выражения (4) и (5) в первое уравнение системы (2), применив метод Бубнова – Галеркина и введя безразмерные величины

$$\lambda = \frac{b}{a}, \quad \varsigma_{rs} = \frac{W_{rs}}{h}, \quad p_{rs}^* = p_{rs}^2 \frac{\rho h b^4}{D \pi^4}, \quad M^* = \frac{M}{M_p}, \quad \zeta = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b},$$

где $p_{rs}^2 = \pi^4 r^4 \left(\lambda^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) c^2 h^2 / 12 \lambda^2 (1 - \mu^2) a^2 b^2$ – квадрат частоты свободных линейных колебаний незагруженной пластины, $c = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольных упругих волн в материале пластины [1], M_p – масса пластины, получим

$$p_{rs}^* \varsigma_{rs} = \frac{3}{4} \lambda^4 (1 - \nu^2) \sum_{mnpqkj} \alpha_{mnpqkj}^{rs} \varsigma_{mn} \varsigma_{pq} \varsigma_{kj} - \frac{\rho h b^4}{D \pi^4} \left(\ddot{\varsigma}_{rs} + 4 M^* \sum_{mn} \beta_{mn}^{rs} \ddot{\varsigma}_{mn} \right). \quad (6)$$

Здесь α_{mnpqkj}^{rs} и β_{mn}^{rs} – коэффициенты интегрирования. Уравнение (6) в матричном виде можно записать в форме

$$[B] \{\ddot{\varsigma}\} + [P] \{\varsigma\} = \{R\}. \quad (7)$$

Начальные условия примем следующими:

$$\{\varsigma\} = \{A, 0, 0, \dots, 0\}, \quad \{\dot{\varsigma}\} = \{0, 0, \dots, 0\}. \quad (8)$$

Для решения системы уравнений (7) совместно с (8) воспользуемся методом центральных разностей [9]. В результате получены следующие результаты при значениях (см. рис. 1): $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 0.3$; $E = 200 \text{ ГПа}$; $h = 0.01 \text{ м}$; $\lambda = 1$; $A = 1.5$; $\zeta, \eta = 0.25$; $M, N = 4$. На рис. 1 а)–f) изображены график движения центральной точки пластины $\varsigma = w/h$ и графики зависимостей от времени переменных $\varsigma_{rs} = W_{rs}/h$ соответствующих изгибных форм, определенных в центральной точке пластины. Рис. 1 а)–d) соответствуют случаям $M^* = 0$ (пунктир) и $M^* = 0.2$ (сплошная линия), рис. 1 е), f) – случаям $M^* = 0.6$ (пунктир) и $M^* = 0.8$ (сплошная линия). Из рисунков видно, что в отличие от линейных колебаний для нелинейных при возбуждении только одной из изгибных форм колебаний возбуждаются и другие формы – как в случае незагруженной пластины, так и с присоединенной массой. Эффект присоединения массы заключается в: 1) уменьшении частоты колебаний; 2) изменении форм колебаний; 3) возбуждении новых изгибных форм; 4) увеличении нелинейности колебаний при увеличении массы.

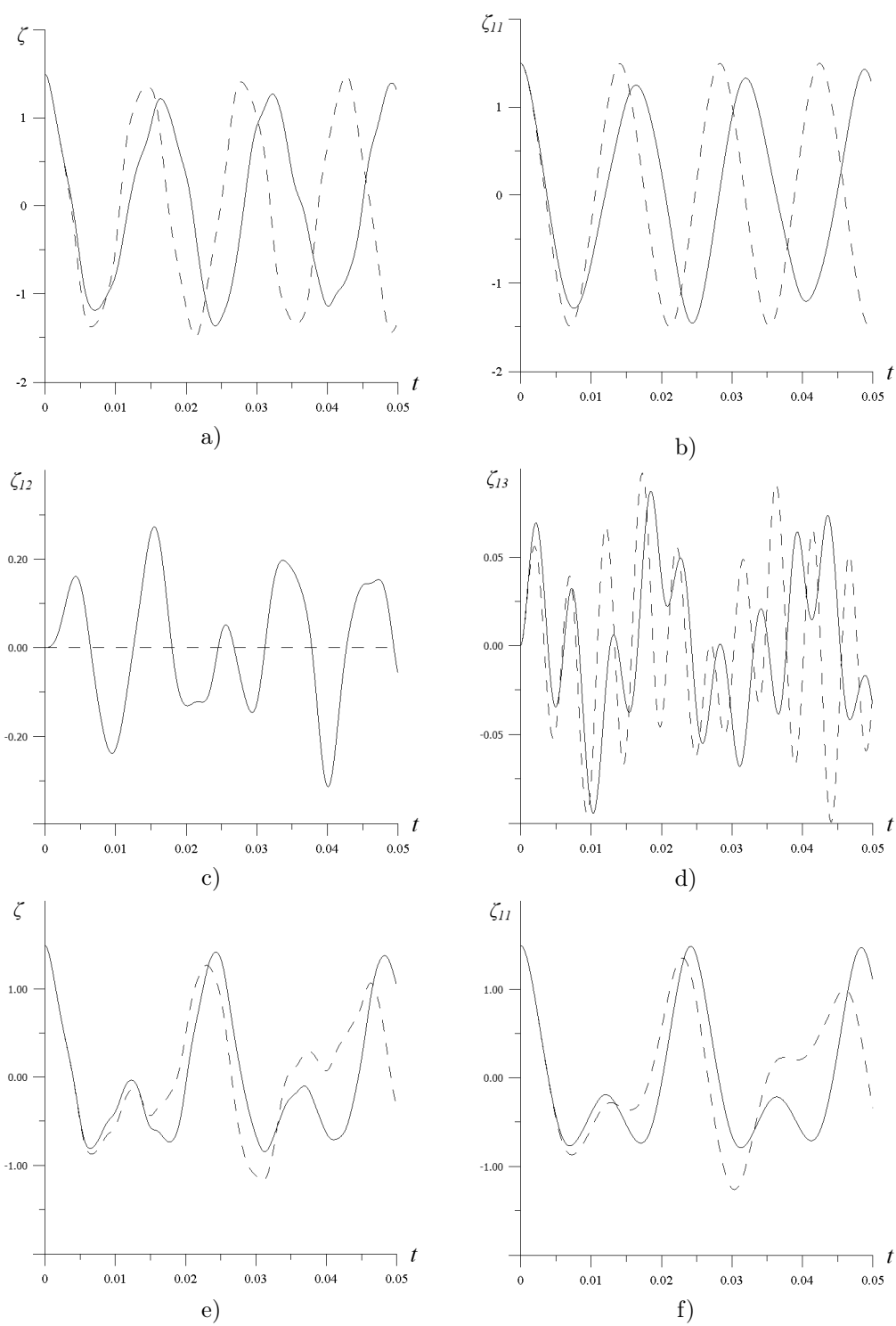


Рис. 1. Графики прогибов и движения основных изгибных форм в центре пластины

2.2. Нелинейные колебания шарнирно опертой замкнутой круговой цилиндрической оболочки. Рассмотрим задачу о колебании шарнирно опертого по торцам замкнутого кругового цилиндра радиуса R и длины l с массой, присоединенной в точке. В этом случае система уравнений (1), описывающая движение, при $k_x = 0$, $k_y = 1/R$ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w &= L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для этого случая граничные условия примут вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, l. \quad (10)$$

В соответствии с граничными условиями (10) и линейным решением [1] выберем функцию прогиба в виде

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_1^{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{ny}{R} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_2^{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{ny}{R}. \quad (11)$$

Здесь следует отметить, что в разложении по изгибным формам (11) для более точного описания движения оболочки учтены и сопряженные изгибные формы.

Подставив соотношение (11) во второе уравнение системы (9), найдем выражение для функции напряжения:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{mnkj} \Phi_1^{mnkj} \cos \frac{k-m}{l} \pi x \cos \frac{j-n}{R} y + \Phi_2^{mnkj} \cos \frac{k-m}{l} \pi x \cos \frac{j+n}{R} y + \\ &+ \Phi_3^{mnkj} \cos \frac{k+m}{l} \pi x \cos \frac{j-n}{R} y + \Phi_4^{mnkj} \cos \frac{k+m}{l} \pi x \cos \frac{j+n}{R} y + \\ &+ \Phi_5^{mnkj} \cos \frac{k-m}{l} \pi x \cos \frac{j-n}{R} y + \Phi_6^{mnkj} \cos \frac{k-m}{l} \pi x \cos \frac{j+n}{R} y + \\ &+ \Phi_7^{mnkj} \cos \frac{k+m}{l} \pi x \cos \frac{j-n}{R} y + \Phi_8^{mnkj} \cos \frac{k+m}{l} \pi x \cos \frac{j+n}{R} y + \\ &+ \Phi_9^{mnkj} \sin \frac{m}{l} \pi x \cos \frac{n}{R} y + \Phi_{10}^{mnkj} \sin \frac{m}{l} \pi x \sin \frac{n}{R} y, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1^{mnkj} &= G \frac{Amj(kn - mj)}{\left[\left(\frac{k-m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{j-n}{R} \right)^2 \right]^2}, & \Phi_2^{mnkj} &= G \frac{Bmj(kn + mj)}{\left[\left(\frac{k-m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{j+n}{R} \right)^2 \right]^2}, \\ \Phi_3^{mnkj} &= G \frac{Amj(kn + mj)}{\left[\left(\frac{k-m}{l} \right)^2 + \left(\frac{j-n}{R} \right)^2 \right]^2}, & \Phi_4^{mnkj} &= G \frac{Bmj(kn + mj)}{\left[\left(\frac{k+m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{j+n}{R} \right)^2 \right]^2}, \\ \Phi_5^{mnkj} &= -G \frac{C(kn - mj)^2}{\left[\left(\frac{k-m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{j-n}{R} \right)^2 \right]^2}, & \Phi_6^{mnkj} &= -G \frac{C(kn + mj)^2}{\left[\left(\frac{k-m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{j+n}{R} \right)^2 \right]^2}, \\ \Phi_7^{mnkj} &= G \frac{C(kn + mj)^2}{\left[\left(\frac{k+m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{j-n}{R} \right)^2 \right]^2}, & \Phi_8^{mnkj} &= G \frac{C(kn - mj)^2}{\left[\left(\frac{k+m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{j+n}{R} \right)^2 \right]^2}, \end{aligned}$$

$$\Phi_9^{mnkj} = 4G \frac{W_1^{mn} m^2}{\left[\left(\frac{m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2}, \quad \Phi_{10}^{mnkj} = 4G \frac{W_2^{mn} m^2}{\left[\left(\frac{m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2},$$

$$A = W_1^{mn} W_1^{kj} + W_2^{mn} W_2^{kj}, \quad B = W_2^{mn} W_2^{kj} + W_1^{mn} W_1^{kj}, \quad C = W_1^{mn} W_2^{kj}, \quad G = \frac{E \pi^2}{4 l^2 R^2}.$$

Введем безразмерные величины

$$\lambda_1 = \frac{l}{R}, \quad \lambda_2 = \frac{l}{h}, \quad M^* = \frac{M}{M_s}, \quad \varsigma_1^{rs} = \frac{W_1^{rs}}{h}, \quad \varsigma_2^{rs} = \frac{W_2^{rs}}{h}, \quad p_{rs}^* = p_{rs}^2 \frac{h l^4 \rho}{D}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{R}.$$

Здесь $p_{rs}^2 = \frac{\pi^4 r}{\vartheta^2 \eta} \frac{T_1 R}{E h} \left(\frac{h}{l^2} \right) c^2$ – квадрат частоты свободных линейных колебаний незагруженной оболочки, $T_1 = \hat{p}_{кр} E h / R$ – значение критического усилия для оболочки, $\hat{p}_{кр} = \frac{1}{12(1-\mu)^2} \frac{(1+\vartheta^2)^2}{\vartheta^2} \eta + \frac{\vartheta^2}{(1+\vartheta^2)^2 \eta}$, $\vartheta = r \pi R / s l$, $\eta = s^2 h / R$ – параметры волнообразования, M_s – масса оболочки [1]. Подставив (11) и (12) в первое уравнение системы (9), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} p_{rs}^* \varsigma_1^{rs} = & \sum_{mnpqkj} \varsigma_1^{kj} (\alpha_{mnpqkj}^{1,rs} \varsigma_1^{mn} \varsigma_1^{pq} + \beta_{mnpqkj}^{1,rs} \varsigma_2^{mn} \varsigma_2^{pq}) + \\ & + \sum_{mnpqkj} \varsigma_2^{kj} (\alpha_{mnpqkj}^{2,rs} \varsigma_1^{mn} \varsigma_1^{pq} + \beta_{mnpqkj}^{2,rs} \varsigma_2^{mn} \varsigma_2^{pq}) + \\ & + \frac{h l^4 \rho}{D} \left(\varsigma_1^{rs} + 4 M^* \sum_{mn} \gamma_{mn}^{1,rs} \varsigma_1^{mn} + \gamma_{mn}^{2,rs} \varsigma_2^{mn} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\alpha_{mnpqkj}^{1,2,3,4rs}$, $\beta_{mnpqkj}^{1,2,3,4rs}$ и $\gamma_{mnpqkj}^{1,2,3,4rs}$ – коэффициенты интегрирования. Систему уравнений (13) можно записать в матричном виде

$$[B] \{\ddot{\varsigma}\} + [P] \{\dot{\varsigma}\} = \{R\}$$

и решить ее методом центральных разностей при начальных условиях

$$\{\varsigma\} = \{A, 0, 0, \dots, 0\}, \quad \{\dot{\varsigma}\} = \{0, 0, \dots, 0\}.$$

Задача была решена при следующих значениях параметров: $\rho = 7800$ кг/м³; $\mu = 0.3$; $E = 200$ ГПа; $h = 0.01$; $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 100$; $A = 3$; $\zeta = 0.5$; $\eta = 0.25$; $M, N = 2$.

На рис. 2 а)–f) изображены графики зависимости изменения безразмерных прогибов в центре оболочки (а, d), изменения основных изгибных (b, e) и сопряженных форм (с, f) в центре оболочки соответственно. Рис. 2 а)–с) – результаты для $M^* = 0$ (пунктир) и $M^* = 0.2$ (сплошная линия). Рис. 2 d)–f) – результаты для $M^* = 0.6$ (пунктир) и $M^* = 0.8$ (сплошная линия).

Из этих графиков можно сделать те же выводы, что и для пластины, но с некоторыми оговорками. Из-за наличия кривизны и замкнутости цилиндрической оболочки, в отличие от пластины, нелинейность проявляется менее заметно. Также следует отметить, что при наличии присоединенной массы в колебательный процесс вовлекаются и сопряженные формы (в отличие от незагруженной оболочки, где они не возбуждаются), тем самым увеличивается густота частотного спектра. Количество данных частот будет в два раза больше, чем у незагруженной оболочки. Следовательно, при воздействии внешних периодических сил на оболочку значительно увеличивается вероятность возникновения резонансных режимов.

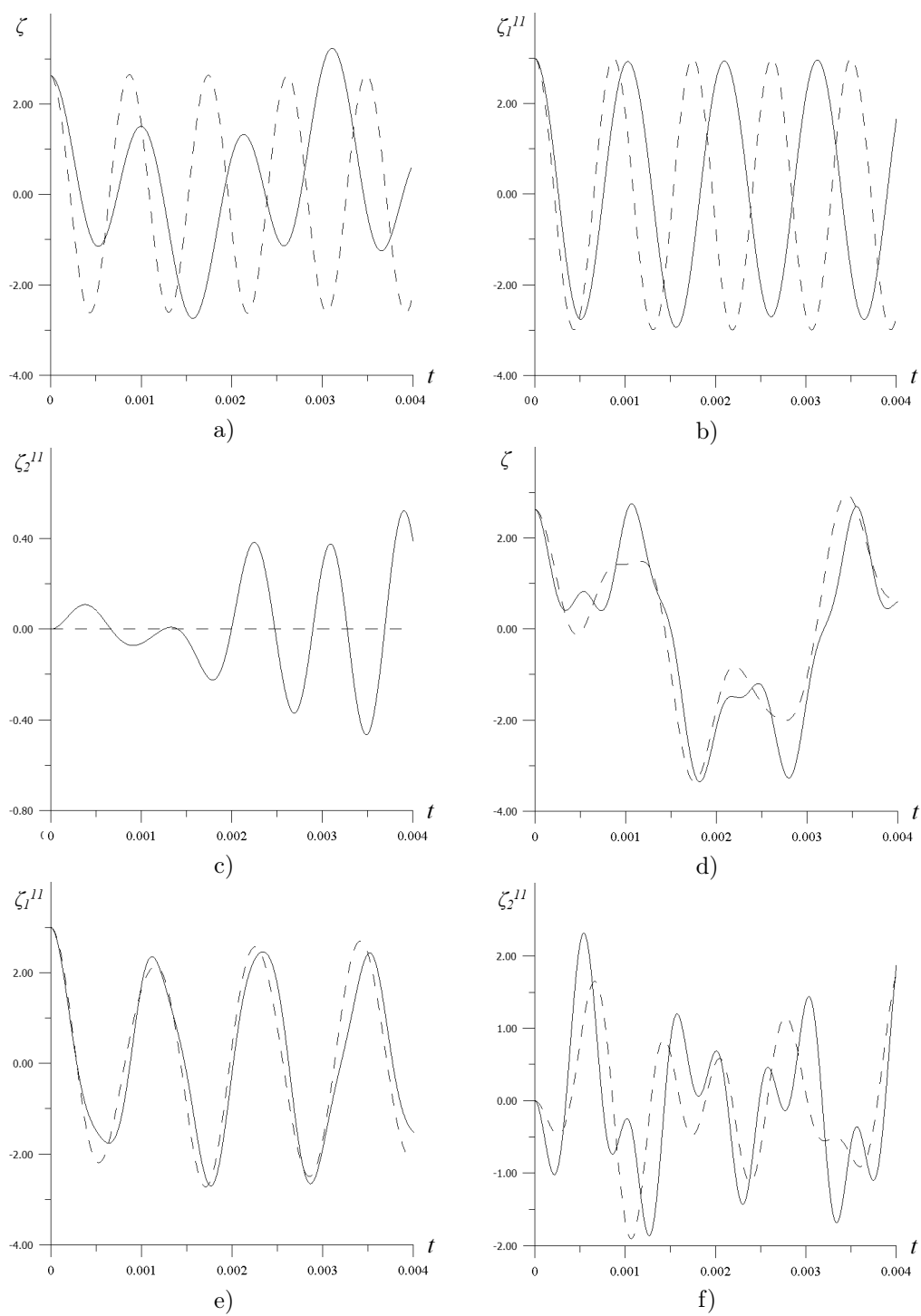


Рис. 2. Графики прогибов и движения основных и сопряженных изгибных форм в центре оболочки

Заключение

При колебаниях пластин влияние геометрической нелинейности весьма существенно уже при прогибах, соизмеримых с толщиной, а при увеличении прогиба нелинейность сказывается все больше. Эффект присоединенной массы (как для круговой цилиндрической оболочки, так и для пластины) выражается в увеличении нелинейности характера колебаний, изменении форм колебаний и уменьшении их частот, причем в случае замкнутой круговой цилиндрической оболочки наблюдаются также увеличение густоты частотного спектра оболочки и возбуждение сопряженных форм, что можно рассматривать как неблагоприятный фактор.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. *Григоренко А.Я.* Численное решение задачи о нелинейных свободных колебаниях пластин // Прикл. мех. 1983. Т. 9, № 10. С. 87–90.
3. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. К.: Выща шк., 1989. 208 с.
4. *Козлов С.В.* К вопросу об определении собственных частот и форм колебаний ортотропной цилиндрической оболочки с присоединенной массой // Прикл. мех. 1981. Т. 17, № 2. С. 46–52.
5. *Серёгин С.В.* Численное и аналитическое исследование свободных колебаний круговых цилиндрических оболочек, несущих присоединенную массу, линейно распределенную вдоль образующей // Вычисл. механ. сплошн. сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 378–384. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.36>.
6. *Коростелева Д.М., Соловьев С.И.* Математическое моделирование собственных колебаний пологой оболочки с присоединённым осциллятором // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 2. С. 153–166. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.153-166>.
7. *Добрышкин А.Ю.* Колебания стержня, несущего малую присоединенную массу // Тр. МАИ. 2020. № 110. <https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2>.
8. *Papkova I.V., Krysko A.V., Yakovleva T.V., Krysko V.A.* A new shear mathematical model of the vibration of porous functionally graded lamellar accelerometers with attached mass in a temperature field // Proc. 2023 30th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems (ICINS). St. Petersburg, 2023. P. 1–4. <https://doi.org/10.23919/ICINS51816.2023.10168375>.
9. *Голованов А.И., Бережной Д.В.* Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел // Казан. гос. ун-т. Казань: ДАС, 2001. 300 с.

Поступила в редакцию 24.06.2024

Принята к публикации 31.07.2024

Султанов Ленар Усманович, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической механики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского; ведущий научный сотрудник Института энергетики и перспективных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
Федеральный исследовательский центр “Казанский научный центр РАН”
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: *Lenar.Sultanov@kpfu.ru*

Гарифуллин Ислам Рамилович, магистр Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *IslRGarifullin@stud.kpfu.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 3, pp. 426–436

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.426-436

Vibrations of Plates and Shells with Attached Mass

L.U. Sultanov^{a,b,}, I.R. Garifullin^{a,**}*

^a*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

^b*FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, 420111 Russia*

E-mail: **Lenar.Sultanov@kpfu.ru*, ***IslRGarifullin@stud.kpfu.ru*

Received June 24, 2024; Accepted July 31, 2024

Abstract

The problem of vibrations of plates and shells with a mass attached to the point was solved. A mathematical model was developed based on the hypothesis of nondeformable normals. The latter was used to derive a system of resolvable dynamic equations for the shell with a mass, where the unknowns are the dynamic deflection and stress function. The problem was solved numerically and analytically. In accordance with the boundary conditions, the shell deflection was expressed as double trigonometric series. The transition from the initial dynamic system to the solution of the final system of nonlinear ordinary differential equations was achieved by the Bubnov–Galerkin method. For time integration, the finite difference method was used.

Keywords: plate, shell, attached mass, finite difference method, Bubnov–Galerkin method

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Graphs showing the deflections and movement of the main bending modes at the plate center.

Fig. 2. Graphs showing generalized deflections at the shell center.

References

1. Volmir A.S. *Nelineinaya dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1972. 432 p. (In Russian)
2. Grigorenko A.Ya. Numerical solution of the nonlinear free vibrations of a plate. *Sov. Appl. Mech.*, 1983, vol. 19, no. 10, pp. 902–905. <https://doi.org/10.1007/BF00883220>.
3. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S., Podchasov N.P. *Nelineinye kolebaniya tsilindricheskikh obolochek* [Nonlinear Vibrations of Cylindrical Shells]. Kyiv, Vyshch. Shk., 1989. 208 p. (In Russian)
4. Kozlov S.V. Determination of the natural frequencies and mode configurations for small vibrations of an orthotropic cylindrical shell with attached masses. *Sov. Appl. Mech.*, 1981, vol. 17, no. 2, pp. 138–142. <https://doi.org/10.1007/BF00886495>.
5. Seregin S.V. Numerical and analytical investigation of free vibrations of circular cylindrical shells with added mass linearly distributed along generatrix. *Vychisl. Mekh. Sploshnykh Sred*, 2014, vol. 7, no. 4, pp. 378–384. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.36>. (In Russian)
6. Korosteleva D.M., Solov'ev S.I. Mathematical modeling of eigenvibrations of the shallow shell with an attached oscillator. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 2, pp. 153–166. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.153-166>. (In Russian)
7. Dobryshkin A.Yu. Oscillations of a rod carrying a small attached mass. *Tr. MAI*, 2020, no. 110. <https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2>. (In Russian)
8. Papkova I.V., Krysko A.V., Yakovleva T.V., Krysko V.A. A new shear mathematical model of the vibration of porous functionally graded lamellar accelerometers with attached mass in a temperature field. *Proc. 2023 30th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems (ICINS)*. St. Petersburg, 2023, pp. 1–4. <https://doi.org/10.23919/ICINS51816.2023.10168375>.
9. Golovanov A.I., Berezhnoi D.V. *Metod konechnykh elementov v mekhanike deformiruemyykh tverdykh tel* [The Finite Element Method in the Mechanics of Deformable Solids]. Kazan State Univ. Kazan, DAS, 2001. 300 p. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Султанов Л.У., Гарифуллин И.Р. Колебания пластин и оболочек с присоединенной массой // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 426–436. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.426-436>. ⟩

⟨ **For citation:** Sultanov L.U., Garifullin I.R. Vibrations of plates and shells with attached mass. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 426–436. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.426-436>. (In Russian) ⟩