

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.407-425

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ, ЗАКРЕПЛЕННОГО
НА ДВУХСТОРОННЕМ ОПОРНОМ ЭЛЕМЕНТЕ
ЧЕРЕЗ УПРУГИЕ ПРОСЛОЙКИ**

В.Н. Паймушин^{1,2}, В.М. Шликин³, С.Ф. Чумакова⁴

¹*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева, г. Казань, 420111, Россия*

²*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

³*Вятский государственный университет, г. Киров, 610000, Россия*

⁴*Государственный университет по землеустройству, г. Москва, 105064, Россия*

Аннотация

Построена простейшая трансформационная модель динамического деформирования стержня-полосы, состоящего из двух участков по длине. Она основана на использовании на незакрепленном участке классической геометрически линейной модели Кирхгофа–Лява, а закрепленный участок конечной длины считается соединенным с жестким и неподвижным опорным элементом через упругие прослойки. На закрепленном участке прогибы стержня и прослоек считаются нулевыми, а для перемещений в осевом направлении в пределах толщин стержня и прослоек приняты аппроксимации по сдвиговой модели С.П. Тимошенко, подчиненные условиям непрерывности в точках их соединения между собой и неподвижности в точках соединения прослоек с опорным элементом. Сформулированы условия кинематического сопряжения незакрепленного и закрепленного участков стержня, при учете которых, исходя из вариационного принципа Даламбера–Лагранжа, получены для введенных в рассмотрение участков соответствующие уравнения движения и граничные условия, а также силовые условия сопряжения участков. На основе построенных уравнений найдены точные аналитические решения задач о свободных и вынужденных гармонических колебаниях стержня рассматриваемого класса. На их основе проведены численные эксперименты по определению собственных форм и частот изгибных колебаний, а также динамической реакции при резонансных колебаниях стержня-полосы, выполненного из однонаправленного волокнистого композита на основе углеродного ЭЛUR-II и связующего ХТ-118. Показана значительная трансформация поперечных касательных напряжений при переходе через границу от незакрепленного участка стержня к закрепленному, а также их ярко выраженная локализация в области закрепленного участка, расположенной вблизи отмеченной границы.

Ключевые слова: колебания, стержень-полоса, модель С.П. Тимошенко, незакрепленный участок, закрепленный участок, уравнение движения, кинематические условия сопряжения участков, силовые условия сопряжения участков, аналитические решения

Введение

При постановке и решении задач механики деформирования тонкостенных элементов конструкций реальные условия их закрепления на опорных элементах обычно заменяют граничными условиями того или иного вида, например, шарнирного опирания или жесткого защемления [1–3], что, безусловно, вносит погрешность в решениях данных задач. Так, например, постановка даже статических задач механики деформирования элементов конструкции с рассмотрением лишь их отдельных участков и формулировкой в концевых сечениях кинематических граничных условий защемления может иметь недостаточную степень точности, если не учесть, что места крепления конструкции всегда имеют некоторую конечную длину, в пределах которой необходимо учитывать податливость закрепленных участков.

Расчет конструкции с учетом податливости отмеченных участков закрепления конечной длины представляет весьма сложную и трудоемкую задачу, что обусловило разработку упрощенных моделей (применительно к балкам и удлиненным пластинам), основанных на замене реальных их участков закрепления локальными упругими и вязкоупругими опорными связями, формулируемыми в точках, а также фрикционными зажимами. Исследования такого класса нашли достаточно полное отражение во многих работах [4–7]. В ранее выполненных работах авторов [8–10] было показано, что для описания процессов статического и динамического деформирования удлиненных элементов тонкостенных конструкций (в том числе и плоских стержней), имеющих участки закрепления конечной длины, требуется введение понятия трансформации параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) (и математических моделей, применяемых для их описания), имеющей место при переходе через границу от незакрепленного участка к закрепленному (или от закрепленного к незакрепленному). В этих работах рассматривался простейший тонкостенный элемент конструкции в виде стержня-полосы с участками закрепления, расположенными только на одной из лицевых поверхностей, что обычно имеет место при креплении элементов тонкостенных конструкций к опорным элементам или соединении их между собой внахлест (особенно выполненных из волокнистых композитных материалов). Для таких элементов в простейшем варианте учет податливости участков закрепления конечной длины может состоять в преобразовании известной сдвиговой модели С.П. Тимошенко в другую, названную трансформационной.

Если же закрепление участка конечной длины является двухсторонним, т. е. осуществляется по обеим лицевым поверхностям, то учет податливости закрепленного участка на основе отмеченной модели, как показано в работе [8], невозможен. Для этого требуется привлечение моделей деформирования более высокого порядка точности. Применительно к незакрепленным участкам тонкостенных элементов конструкций разработке таких моделей к настоящему времени посвящена обширная научная литература, критический анализ которой проведен, в частности, в статьях [11, 12]. В настоящей работе рассмотрена задача математического моделирования процессов динамического деформирования стержня-полосы, закрепленного на жестком неподвижном опорном элементе через упругие прослойки (рис. 1).

Введение в рассмотрение прослоек в исследуемой механической системе обусловлено, во-первых, их наличием в реальных конструкциях [13]: например, в изделиях конструкционной оптики летательных аппаратов (фонари самолетов, иллюминаторы и любые окна и двери из стекла в зданиях, которые соединяются с элементами жесткого каркаса всегда через эластичные герметизирующие прослойки).

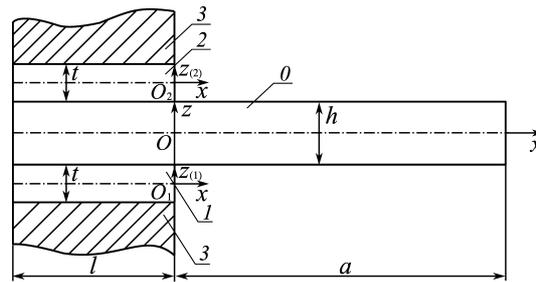


Рис. 1. Схема закрепления стержня-полосы в опорном элементе 3 через упругие прослойки 1 и 2

Во-вторых, без введения в расчетную схему прослоек построение простейшей математической модели деформирования конструкции в целом с использованием для стержня-полосы в пределах участка его закрепления (рис. 1) простейших известных моделей деформирования (Кирхгофа – Лява, типа С.П. Тимошенко без учета поперечного обжатия и др.) вообще невозможно.

Для постановки и решения рассматриваемого класса задач ниже предложена трансформационная модель деформирования стержня с простейшими аппроксимациями перемещений на его участках: на закрепленных – для стержня и прослоек использована сдвиговая модель С.П. Тимошенко при нулевых прогибах в поперечном направлении, а для незакрепленного – классическая модель Кирхгофа – Лява.

1. Модель деформирования участка закрепления конечной длины

Рассмотрим стержень-полосу единичной ширины, закрепленный на конечной длине l в абсолютно жестком опорном элементе 3 через упругие прослойки 1 и 2 (рис. 1), работающие на сдвиг. Введя в рассмотрение декартовы системы координат $Oxz, O_1xz(1), O_2xz(2)$ и обозначив через h и t толщины стержня и прослоек соответственно, будем считать, что их деформирование в точках поверхностей $z = \pm h/2, z(1) = t/2, z(2) = -t/2$ происходит без взаимного проскальзывания. В простейшем приближении процесс деформирования закрепленного участка стержня и прослоек опишем сдвиговой моделью С.П. Тимошенко, в соответствии с которой для перемещений $U^{(0)}, W^{(0)}$ произвольных точек поперечных сечений в направлениях осей Ox, Oz примем соответственно аппроксимации

$$U^{(0)} = u^{(0)} + z\gamma^{(0)}, \quad W^{(0)} \equiv 0, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \tag{1}$$

$$U^{(k)} = u^{(k)} + z\gamma^{(k)}, \quad W^{(k)} \equiv 0, \quad k = 1, 2, \quad -t/2 \leq z_{(k)} \leq t/2. \tag{2}$$

Здесь $u^{(0)}, \gamma^{(0)}$ – осевые перемещения и угол поворота поперечного сечения закрепленного участка стержня соответственно, $u^{(k)}, \gamma^{(k)}, k = 1, 2$, – то же для прослоек.

Подчинив перемещения $U^{(0)}, U^{(k)}$ кинематическим условиям сопряжения стержня с прослойками, записываемыми в виде

$$\begin{aligned} U^{(0)}(x, z = -h/2) &= U^{(1)}(x, z(1) = t/2), \\ U^{(0)}(x, z = h/2) &= U^{(2)}(x, z(2) = -t/2), \end{aligned}$$

и считая $U^{(1)}(x, z(1) = -t/2) = 0, U^{(2)}(x, z(2) = t/2) = 0$, получим зависимости

$$u^{(1)} = \frac{t}{2}\gamma^{(1)}, \quad \gamma^{(1)} = \frac{1}{t} \left(u^{(0)} - \frac{h}{2}\gamma^{(0)} \right),$$

$$u^{(2)} = -\frac{t}{2}\gamma^{(2)}, \quad \gamma^{(2)} = -\frac{1}{t}\left(u^{(0)} + \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right).$$

При их подстановке в (2) найдем преобразованные аппроксимации

$$U^{(1)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{z(1)}{t}\right)\left(u^{(0)} - \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right), \quad U^{(2)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{z(2)}{t}\right)\left(u^{(0)} + \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right). \quad (3)$$

В геометрически линейном приближении аппроксимациям (1) и (3) соответствуют необходимые в дальнейшем ненулевые компоненты деформаций (нижний индекс x после запятой здесь и далее означает дифференцирование соответствующей величины по координате x)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(0)} &= u_{,x}^{(0)} + z\gamma_{,x}^{(0)}, \quad \gamma_{xz}^{(0)} = \gamma^{(0)}, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \\ \gamma_{xz}^{(1)} &= \frac{\partial U^{(1)}}{\partial z(1)} = \frac{1}{t}\left(u^{(0)} - \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right), \quad \gamma_{xz}^{(2)} = \frac{\partial U^{(2)}}{\partial z(2)} = -\frac{1}{t}\left(u^{(0)} + \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

и в физически линейно-упругом приближении – ненулевые компоненты напряжений

$$\sigma_x^{(0)} = E_1\left(u_{,x}^{(0)} + z\gamma_{,x}^{(0)}\right), \quad \sigma_{xz}^{(0)} = G_{13}\gamma^{(0)}, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad (5)$$

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \frac{G_{13}^0}{t}\left(u^{(0)} - \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right), \quad \sigma_{xz}^{(2)} = -\frac{G_{13}^0}{t}\left(u^{(0)} + \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right), \quad (6)$$

где E_1, G_{13} – модуль упругости в направлении оси Ox и модуль поперечного сдвига материала стержня соответственно; G_{13}^0 – модуль поперечного сдвига материала прослоек.

Заметим, что при $t \rightarrow 0$, как следует из (4), $\gamma_{xz}^{(1)} \rightarrow \infty$ и $\gamma_{xz}^{(2)} \rightarrow \infty$. В этом случае при $G_{13}^0 \neq 0$, как видно из (6), $\sigma_{xz}^{(1)} \rightarrow \infty, \sigma_{xz}^{(2)} \rightarrow \infty$. Следовательно, основанная на аппроксимациях (3) модель деформирования участка стержня, закрепленного в абсолютно жестком и неподвижном опорном элементе через деформируемые прослойки (рис. 1), при $t \rightarrow 0$ и $G_{13}^0 \neq 0$ является некорректной. При $t = 0$ она становится физически содержательной только при $G_{13}^0 = 0$, когда допускается свободное проскальзывание без трения граничных сечений стержня $z = \pm h/2$ относительно граничных плоскостей опорного элемента [14].

Используя (5) и (6), введем в рассмотрение приведенные к срединным поверхностям $z = 0, z(1) = 0, z(2) = 0$ усилия и моменты

$$\begin{aligned} T_x^{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^{(0)} dz = B_{11}u_{,x}^{(0)}, \quad M_x^{(0)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^{(0)} z dz = D_{11}\gamma_{,x}^{(0)}, \\ T_{xz}^{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}^{(0)} dz = B_{13}\gamma^{(0)}, \quad B_{11} = E_1 h, \quad B_{13} = G_{13} h, \quad D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12}, \quad (7) \\ T_{xz}^{(1)} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^{(1)} dz(1) = G_{13}^0 \left(u^{(0)} - \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right), \end{aligned}$$

$$T_{xz}^{(2)} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^{(2)} dz_{(2)} = -G_{13}^0 \left(u^{(0)} + \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right),$$

при учете которых для определения вариации потенциальной энергии деформации закрепленного участка стержня будет иметь место выражение

$$\begin{aligned} \delta\Pi^{(0)} = & \int_{-l}^0 \left[T_x^{(0)} \delta u_{,x}^{(0)} + M_x^{(0)} \delta \gamma_{,x}^{(0)} + \frac{T_{xz}^{(1)}}{t} \left(\delta u^{(0)} - \frac{h}{2} \delta \gamma^{(0)} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{T_{xz}^{(2)}}{t} \left(\delta u^{(0)} + \frac{h}{2} \delta \gamma^{(0)} \right) \right] dx = \left(T_x^{(0)} \delta u^{(0)} + M_x^{(0)} \delta \gamma^{(0)} \right) \Big|_{x=-l}^{x=0} - \\ & - \int_{-l}^0 \left\{ \left[T_{x,x}^{(0)} - \frac{1}{t} \left(T_{xz}^{(1)} - T_{xz}^{(2)} \right) \right] \delta u^{(0)} + \left[M_{x,x}^{(0)} - T_{xz}^{(0)} + \frac{h}{2t} \left(T_{xz}^{(1)} + T_{xz}^{(2)} \right) \right] \delta \gamma^{(0)} \right\} dx, \end{aligned} \quad (8)$$

а также зависимости

$$T_{xz}^{(1)} - T_{xz}^{(2)} = 2G_{13}^0 u^{(0)}, \quad T_{xz}^{(1)} + T_{xz}^{(2)} = -G_{13}^0 h \gamma^{(0)}. \quad (9)$$

Таким образом, при использовании (7) и (9) придем к дифференциальным выражениям

$$\begin{aligned} L_T^{(0)} &= T_{x,x}^{(0)} - \frac{1}{t} \left(T_{xz}^{(1)} - T_{xz}^{(2)} \right) = B_{11} u_{,xx}^{(0)} - \frac{2G_{13}^0}{t} u^{(0)}, \\ L_M^{(0)} &= M_{x,x}^{(0)} - T_{xz}^{(0)} + \frac{h}{2t} \left(T_{xz}^{(1)} + T_{xz}^{(2)} \right) = D_{11} \gamma_{,xx}^{(0)} - \left(B_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2}{2t} \right) \gamma^{(0)}, \end{aligned} \quad (10)$$

указывающим, что исследуемый вид опорного элемента стержня-полосы приводит к несвязанным между собой задачам о продольных осевых и поперечных изгибных формах динамического деформирования на его участке закрепления. При $G_{13}^0 \equiv 0$ они сводятся к дифференциальным выражениям в задачах, которые описывают изученные ранее свободные и вынужденные колебания стержня-полосы, закрепленного на двухсторонних скользящих опорах [14], на основе простейшей трансформационной модели деформирования.

Используя аппроксимации (1) и (3), для вариации работы инерционных сил на закрепленном участке можно получить выражение

$$\delta K^{(0)} = - \int_{-l}^0 \left[\left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3} \right) \ddot{u}^{(0)} \delta u^{(0)} + \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6} \right) \ddot{\gamma}^{(0)} \delta \gamma^{(0)} \right] dx, \quad (11)$$

где ρ, ρ_0 – плотности материалов стержня и прослойки, $\ddot{u} = \partial^2 / \partial \tau^2, \dots$ – обозначения частных производных по времени τ .

2. Модель деформирования незакрепленного участка и уравнения движения стержня

При использовании на закрепленном участке стержня аппроксимаций (3), дополненных равенствами $W^{(k)} = W^{(0)} \equiv 0$, $k = 1, 2$, на незакрепленном участке $0 \leq x \leq a$ простейшими для перемещений U, W произвольных точек поперечных сечений в направлениях осей Ox, Oz являются аппроксимации

$$U = u - zw_{,x}, \quad W = w, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (12)$$

соответствующие использованию классической модели Кирхгофа – Лява, где u, w – перемещения точек, расположенных на оси Ox данного участка. Функции перемещений в (1) и (12) в сечении $x = 0$ необходимо подчинить кинематическим условиям сопряжения участков

$$u^{(0)} \Big|_{x=0} = u|_{x=0}, \quad w|_{x=0} = 0, \quad \gamma^{(0)} \Big|_{x=0} = -w_{,x}|_{x=0}. \quad (13)$$

Аппроксимациям (12) в геометрически линейном приближении соответствуют деформации и нормальные напряжения

$$\varepsilon_x = u_{,x} - zw_{,xx}, \quad \sigma_x = E_1 \varepsilon_x = E_1 (u_{,x} - zw_{,xx}),$$

а также вариация потенциальной энергии деформации

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_0^a (T_x \delta u_{,x} - M_x \delta w_{,xx}) dx = \\ &= (T_x \delta u - M_x \delta w_{,x} + Q_z \delta w) \Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a (T_{x,x} \delta u + Q_{z,x} \delta w) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь T_x, M_x, Q_z – осевая сила, изгибающий момент и поперечная сила в произвольном сечении незакрепленной части стержня соответственно, определяемые соотношениями упругости

$$T_x = B_{11} u_{,x}, \quad M_x = -D_{11} w_{,xx}, \quad Q_z = M_{x,x} = -D_{11} w_{,xxx}. \quad (15)$$

В соответствии с (12) выражение для вариации работы инерционных сил запишем в приближении

$$\begin{aligned} \delta K &= - \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} \rho [(\ddot{u} - z\ddot{w}_{,x}) (\delta u - z\delta w_{,x}) + \ddot{w}\delta w] dx dz = \\ &= -\rho h \int_0^a \left(\ddot{u}\delta u + \frac{t^2}{12} \ddot{w}_{,x} \delta w_{,x} + \ddot{w}\delta w \right) dx \approx -\rho h \int_0^a (\ddot{u}\delta u + \ddot{w}\delta w) dx, \end{aligned} \quad (16)$$

пренебрегая в (16) подчеркнутым слагаемым, обусловленным силами инерции при повороте поперечного сечения незакрепленного участка стержня.

Для вывода уравнений движения закрепленного и незакрепленного участков стержня воспользуемся вариационным уравнением принципа Даламбера – Лагранжа

$$\delta\Pi^{(0)} - \delta K^{(0)} + \delta\Pi - \delta K - \delta A = 0. \quad (17)$$

В предположении, что на незакрепленную часть стержня действует поверхностная нагрузка $p_z = p_z(x, \tau)$, входящая в (17), вариация работы внешней нагрузки будет определена выражением

$$\delta A = \int_0^a p_z \delta w dx. \quad (18)$$

Из уравнения (17) после подстановки в него соотношений (8), (11), (14), (16) и (18), а также при учете дифференциальных выражений (10) и кинематических условий сопряжения участков (13) следуют:

- уравнения движения для закрепленного участка $-l \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned} B_{11} u_{,xx}^{(0)} - \frac{2G_{13}^0}{t} u^{(0)} - \left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3} \right) \ddot{u}^{(0)} &= 0, \\ D_{11} \gamma_{,xx}^{(0)} - \left(B_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2}{2t} \right) \gamma^{(0)} - \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6} \right) \ddot{\gamma}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

и силовые граничные условия, формулируемые для (19) в сечении $x = -l$,

$$T_x^{(0)} \Big|_{x=-l} = 0 \text{ при } \delta u^{(0)} \neq 0, \quad M_x^{(0)} \Big|_{x=-l} = 0 \text{ при } \delta \gamma^{(0)} \neq 0; \quad (20)$$

- уравнения движения для незакрепленного участка $0 \leq x \leq a$

$$B_{11} u_{,xx} - \rho h \ddot{u} = 0, \quad -D_{11} w_{,xxxx} - \rho h \ddot{w} + p_z = 0 \quad (21)$$

и силовые граничные условия, формулируемые для (20) в сечении $x = a$,

$$\begin{aligned} T_x \Big|_{x=a} &= 0 \text{ при } \delta u \neq 0, \\ M_x \Big|_{x=a} &= 0 \text{ при } \delta w_{,x} \neq 0, \\ Q_z \Big|_{x=a} &= 0, \text{ при } \delta w \neq 0; \end{aligned} \quad (22)$$

- а также силовые условия сопряжения участков

$$\left(T_x^{(0)} - T_x \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(M_x^{(0)} - M_x \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (23)$$

формулируемые в сечении $x = 0$ в силу $\delta u^{(0)} = \delta u \neq 0$, $\delta \gamma^{(0)} = -\delta w_{,x} \neq 0$.

Следует особо подчеркнуть, что в силу принятого для участка $-l \leq x \leq 0$ предположения $w^{(0)}(x) = 0$, содержащееся в (13) второе условие, формулируемое в сечении $x = 0$, является граничным условием $w \Big|_{x=0} = 0$ для второго уравнения в (21).

На основе полученных уравнений движения (19) и (21), соответственно, закрепленных и незакрепленного участков стержня с учетом условий (20), (22) и (23) можно ставить и решать две основные задачи, состоящие в определении требуемого спектра собственных форм и частот колебаний стержня рассматриваемого класса, а также его динамической реакции при действии заданной нагрузки $p_z = p_z(x, \tau)$.

3. Определение собственных форм и частот колебаний стержня (модальный анализ)

Решения уравнений (19) для закрепленного участка стержня (рис. 1) будем искать в виде

$$u^{(0)} = \tilde{u}^{(0)} e^{i\omega\tau}, \quad \gamma^{(0)} = \tilde{\gamma}^{(0)} e^{i\omega\tau}, \quad (24)$$

где i – мнимая единица, ω – круговая частота. Подставив (24) в (19), получим уравнения

$$\tilde{u}_{,xx}^{(0)} + k_{u_0}^2 \tilde{u}^{(0)} = 0, \quad \tilde{\gamma}_{,xx}^{(0)} - k_\gamma^2 \tilde{\gamma}^{(0)} = 0 \quad (25)$$

с коэффициентами

$$k_{u_0}^2 = \frac{1}{B_{11}} \left[\left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3} \right) \omega^2 - \frac{2G_{13}^0}{t} \right],$$

$$k_\gamma^2 = \frac{1}{D_{11}} \left[B_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2}{2t} - \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6} \right) \omega^2 \right].$$

Вычисления показали, что даже при малых значениях G_{13}^0 и толщине про-слоек t одного порядка с h имеют место неравенства $k_{u_0}^2 < 0$ и $k_\gamma^2 > 0$. В этом случае общие решения уравнений (25) будут иметь вид

$$\tilde{u}^{(0)} = c_1 \sin(k_{u_0} x) + c_2 \cos(k_{u_0} x), \quad \tilde{\gamma}^{(0)} = d_1 e^{k_\gamma x} + d_2 e^{-k_\gamma x}, \quad -l \leq x \leq 0. \quad (26)$$

Здесь c_1, c_2, d_1, d_2 – постоянные интегрирования. В соответствии с представлениями (24) усилия $T_x^{(0)}, T_{xz}^{(0)}$ и моменты $M_x^{(0)}$ в закрепленной части стержня будут определяться выражениями

$$T_x^{(0)} = \tilde{T}_x^{(0)} e^{i\omega\tau}, \quad T_{xz}^{(0)} = \tilde{T}_{xz}^{(0)} e^{i\omega\tau}, \quad M_x^{(0)} = \tilde{M}_x^{(0)} e^{i\omega\tau}, \quad (27)$$

в которых величины $\tilde{T}_x^{(0)}, \tilde{T}_{xz}^{(0)}$ и $\tilde{M}_x^{(0)}$ на основании соотношений (7) и полученных решений (26) определяются зависимостями

$$\begin{aligned} \tilde{T}_x^{(0)} &= B_{11} k_{u_0} [c_1 \cos(k_{u_0} x) - c_2 \sin(k_{u_0} x)], \\ \tilde{T}_{xz}^{(0)} &= B_{13} (d_1 e^{k_\gamma x} + d_2 e^{-k_\gamma x}), \\ \tilde{M}_x^{(0)} &= D_{11} k_\gamma (d_1 e^{k_\gamma x} - d_2 e^{-k_\gamma x}). \end{aligned} \quad (28)$$

При анализе свободных колебаний стержня во втором уравнении (21) следует принять условие $p_z = 0$. С учетом данного условия вместо (21) получим уравнения

$$B_{11} u_{,xx} - \rho h \ddot{u} = 0, \quad D_{11} w_{,xxxx} + \rho h \ddot{w} = 0. \quad (29)$$

Решения данных уравнений будем искать в виде

$$u = \tilde{u} e^{i\omega\tau}, \quad w = \tilde{w} e^{i\omega\tau}, \quad (30)$$

что при подстановке в (29) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\tilde{u}_{,xx} + k_u^2 \tilde{u} = 0, \quad \tilde{w}_{,xxxx} - k_w^4 \tilde{w} = 0, \quad (31)$$

в которых $k_u^2 = \rho\omega^2/E_1, k_w^4 = \rho h\omega^2/D_{11}$. Полученные уравнения (31) имеют решения

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= c_3 \sin(k_u x) + c_4 \cos(k_u x), \\ \tilde{w} &= g_1 \sin(k_w x) + g_2 \cos(k_w x) + g_3 e^{k_w x} + g_4 e^{-k_w x}, \quad 0 \leq x \leq a, \end{aligned} \quad (32)$$

где $c_3, c_4, g_1, \dots, g_4$ – постоянные интегрирования. В соответствии с (30) введем необходимые в дальнейшем представления

$$T_x = \tilde{T}_x e^{i\omega\tau}, \quad M_x = \tilde{M}_x e^{i\omega\tau}, \quad Q_z = \tilde{Q}_z e^{i\omega\tau}, \quad (33)$$

в которых величины $\tilde{T}_x, \tilde{M}_x, \tilde{Q}_z$ на основании соотношений (15) и полученных решений (32) будут определяться зависимостями

$$\begin{aligned} \tilde{T}_x &= B_{11} \tilde{u}_{,x} = B_{11} k_u [c_3 \cos(k_u x) - c_4 \sin(k_u x)], \\ \tilde{M}_x &= -D_{11} k_w^2 (-g_1 \sin(k_w x) - g_2 \cos(k_w x) + g_3 e^{k_w x} + g_4 e^{-k_w x}), \\ \tilde{Q}_z &= -D_{11} k_w^3 (-g_1 \cos(k_w x) + g_2 \sin(k_w x) + g_3 e^{k_w x} - g_4 e^{-k_w x}). \end{aligned} \quad (34)$$

Полученные решения (26) и (32) содержат десять постоянных интегрирования $c_1, \dots, c_4, d_1, d_2$ и g_1, \dots, g_4 , для нахождения которых имеются условия (13), (20), (22) и (23). Используя данные условия с учетом представлений (24), (27), (30) и (33), а также зависимости (28) и (34), приходим к системе десяти алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} c_2 - c_4 &= 0, \quad g_2 + g_3 + g_4 = 0, \quad d_1 + d_2 + k_w (g_1 + g_3 - g_4) = 0, \\ c_1 \cos(-k_{u_0} l) - c_2 \sin(-k_{u_0} l) &= 0, \quad d_1 e^{-k_\gamma l} - d_2 e^{k_\gamma l} = 0, \\ c_3 \cos(k_u a) - c_4 \sin(k_u a) &= 0, \quad -g_1 \sin(k_w a) - g_2 \cos(k_w a) + \\ + g_3 e^{k_w a} + g_4 e^{-k_w a} &= 0, \quad -g_1 \cos(k_w a) + g_2 \sin(k_w a) + g_3 e^{k_w a} - g_4 e^{-k_w a} = 0, \\ k_{u_0} c_1 - k_u c_3 &= 0, \quad k_\gamma (d_1 - d_2) + k_w^2 (-g_2 + g_3 + g_4) = 0, \end{aligned}$$

которая распадается на две независимые системы: первая система содержит постоянные интегрирования c_1, \dots, c_4 , соответствующие свободным продольным колебаниям стержня, а вторая – только постоянные $d_1, d_2, g_1, \dots, g_4$, соответствующие формам поперечных (изгибных) колебаний. При этом практический интерес представляет последний тип колебаний, происходящих в сравнительно низком диапазоне частот.

Систему однородных уравнений относительно постоянных интегрирования $d_1, d_2, g_1, \dots, g_4$ можно представить в виде

$$[A] \{X\} = \{0\}, \quad (35)$$

где $[A], \{X\}$ – квадратная матрица и столбец соответственно, состоящие из элементов (неотмеченные элементы матрицы $[A]$ имеют нулевые значения)

$$\begin{aligned} a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{21} = a_{22} &= 1, \quad a_{23} = a_{25} = k_w, \quad a_{26} = -k_w, \quad a_{31} = e^{-k_\gamma l}, \\ a_{32} = -e^{k_\gamma l}, \quad a_{43} = -\sin(k_w a), \quad a_{44} &= -\cos(k_w a), \quad a_{45} = e^{k_w a}, \quad a_{46} = e^{-k_w a}, \\ a_{53} = -\cos(k_w a), \quad a_{54} = \sin(k_w a), \quad a_{55} &= e^{k_w a}, \quad a_{56} = -e^{-k_w a}, \quad a_{61} = k_\gamma, \\ a_{61} = -k_\gamma, \quad a_{64} = -k_w^2, \quad a_{65} = a_{66} &= k_w^2, \quad x_1 = d_1, \quad x_2 = d_2, \quad x_3 = g_1, \\ x_4 = g_2, \quad x_5 = g_3, x_6 = g_4. \end{aligned} \quad (36)$$

Система уравнений (35) имеет нетривиальное решение $\{X\} \neq \{0\}$ при условии равенства нулю определителя матрицы $[A]$ ($\det [A] = 0$), из которого можно найти интересующие нас собственные частоты ω_j ($j = 1, 2, 3, \dots$), каждой из которых соответствует некоторое ненулевое решение $\{X\}_j$. Так как уравнения (35) являются однородными, то данное решение находится с точностью до множителя. Для этого все неизвестные обычно выражают через некоторую одну неизвестную величину, которой впоследствии задают какое-то произвольное значение. Однако данный

прием требует проведения длительных неформальных преобразований структуры исходной системы уравнений, которые трудно поддаются автоматизации вычислений. Наиболее простой способ получения нетривиального решения системы (35) (без преобразования ее структуры) может состоять в применении известного правила Пэйна – Айронса [15,16]. Согласно данному правилу нужно выбрать наибольший по модулю диагональный элемент a_{ii} матрицы $[A]$, который умножить на параметр штрафа $\alpha = 10^{10} \div 10^{12}$, а элементу с номером i правой части системы вместо нуля присвоить значение $a_{ii}\alpha q$, где $q \ll \alpha$ – некоторая произвольная величина. Тогда уравнение с номером i системы (35) становится таким:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ii}\alpha x_i + \dots + a_{i6}x_6 = a_{ii}\alpha q. \quad (37)$$

Слагаемое $a_{ii}\alpha x_i$ в (37) получается по модулю примерно в α раз выше всех остальных. Это дает $x_i \approx q$ (с точностью до $10^{-10} \div 10^{-12}$), а все остальные неизвестные при решении отмеченной системы получатся выраженными через x_i .

4. Определение динамической реакции при вынужденных изгибных колебаниях стержня

Предположим, что действующая на незакрепленную часть стержня поверхностная нагрузка $p_z = p_z(x, \tau)$ изменяется по гармоническому закону $p_z = \tilde{p}_z(x)e^{i\omega\tau}$. Тогда в соответствии с (21) вместо второго уравнения в (31) будем иметь неоднородное дифференциальное уравнение

$$\tilde{w}_{,xxxx} - k_w^4 \tilde{w} = \tilde{p}_z(x)/D_{11}, \quad (38)$$

общее решение которого имеет вид

$$\tilde{w} = g_1 \sin(k_w x) + g_2 \cos(k_w x) + g_3 e^{k_w x} + g_4 e^{-k_w x} + \hat{w}(x),$$

где g_1, \dots, g_4 – постоянные интегрирования (с обозначениями предыдущего раздела, но имеющие вполне определенные значения), а $\hat{w}(x)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения, зависящее от характера зависимости $\tilde{p}_z(x)$. Если величину \tilde{p}_z в простейшем случае считать постоянной по всей длине незакрепленного участка стержня, то из (38) следует решение $\hat{w} = -\tilde{p}_z/(D_{11}k_w^4)$.

Необходимо заметить, что при определении динамической реакции стержня от нагрузки $p_z = \tilde{p}_z(x)e^{i\omega\tau}$ продольные и изгибные колебания стержня будут по-прежнему независимыми. При этом практический интерес представляют изгибные колебания, происходящие, как уже отмечалось выше, в сравнительно низком диапазоне частот и определяемые постоянными интегрирования $d_1, d_2, g_1, \dots, g_4$ (в обозначениях предыдущего раздела), которые можно найти из системы линейных неоднородных уравнений

$$[A] \{X\} = \{B\}. \quad (39)$$

Матрица $[A]$ и столбец $\{X\}$ по-прежнему состоят из элементов (36), а столбец $\{B\}$ (в случае $\tilde{p}_z = \text{const}$) содержит элементы $b_1 = \tilde{p}_z/(D_{11}k_w^4)$, $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0$.

Решение $\{X\} = [A]^{-1} \{B\}$ системы (39) в конечном итоге полностью определяет параметры НДС при изгибных колебаниях стержня. Однако следует заметить, что разработанная методика определения динамической реакции стержня не учитывает демпфирующие свойства его материала и упругих прослоек и поэтому может давать корректное решение только при частотах, находящихся вдали

от резонансной зоны, в то время как наибольшие амплитуды колебаний обычно имеют место в резонансных режимах нагружения, при которых демпфирующие свойства материала необходимо обязательно учитывать [17]. При гармоническом законе деформирования стержня это можно сделать с использованием известной гипотезы комплексного внутреннего трения [18–20], заменив величины E_1 , G_{13} и G_{13}^0 комплексными модулями упругости

$$\bar{E}_1 = E_1 + i \frac{E_1 \delta_1}{\pi}, \quad \bar{G}_{13} = G_{13} + i \frac{G_{13} \delta_{13}}{\pi}, \quad \bar{G}_{13}^0 = G_{13}^0 + i \frac{G_{13}^0 \delta_{13}^0}{\pi},$$

где δ_1 – логарифмический декремент колебаний (ЛДК) материала стержня при растяжении-сжатии в направлении оси Ox ; δ_{13} , δ_{13}^0 – то же при поперечном сдвиге стержня и прослоек.

5. Вычислительные эксперименты и анализ полученных результатов

Эксперимент 1. Проведен модальный анализ рассматриваемого стержня (рис. 1), выполненного из однонаправленного волокнистого композита на основе углеродной ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 с характеристиками [21]: $E_1 = 104.7$ ГПа, $G_{13} = 1.0$ ГПа, $\rho = 1500$ кг/м³, $\delta_1 = 0.05$, $\delta_{13} = 0.10$. Размеры стержня: $l = 50$ мм, $a = 300$ мм, $h = 3$ мм. Упругие прослойки имеют толщину $t = 0.8$ мм и выполнены из твердого полиуретана PR700 с характеристиками: $G_{13}^0 = 0.77$ ГПа, $\delta_{13}^0 = 0.75$, $\rho_0 = 1240$ кг/м³.

Частотное уравнение $\det [A(\omega)] = 0$ решалось методом половинного деления [22] до выполнения условия $(\omega_{\max}^{(k)} - \omega_{\min}^{(k)}) / \omega_{\max}^{(k)} \leq \psi$, где $\omega_{\max}^{(k)}$, $\omega_{\min}^{(k)}$ – границы текущего интервала поиска, в котором расположен корень частотного уравнения, k – номер текущей итерации, ψ – заданная точность. После выполнения данного условия был найден искомый корень $\omega = (\omega_{\max}^{(k)} + \omega_{\min}^{(k)}) / 2$. Для нахождения интервалов поиска корней уравнения $\det [A(\omega)] = 0$ предварительно была проведена стандартная процедура отделения корней, в результате чего были выделены три интервала частот $f = \omega / (2\pi)$: $20 \leq f \leq 60$ Гц, $260 \leq f \leq 300$ Гц и $740 \leq f \leq 780$ Гц, каждый из которых содержал один корень указанного уравнения.

Таким способом были найдены три низшие собственные частоты $f_1 = 43.374$ Гц, $f_2 = 272.413$ Гц и $f_3 = 764.136$ Гц при заданной точности $\psi = 1 \cdot 10^{-6}$. Для достижения указанной точности определения данных трех частот потребовалось, соответственно, 20, 18 и 16 итераций.

Для сравнения были определены три низшие циклические частоты f_1^* , f_2^* , f_3^* свободных колебаний рассматриваемого стержня в случае жесткого заземления сечения $x = 0$ с использованием известной формулы [23]

$$\omega_j^* = \beta_j^2 \sqrt{EI / (m_0 a^4)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (40)$$

где EI – жесткость стержня на изгиб, m_0 – погонная масса, $\beta_1 = 1.87510$, $\beta_2 = 4.69409$, $\beta_3 = 7.85476$ (для композитного стержня-полосы в формуле (40) вместо EI и m_0 следует взять величины D_{11} и ρh соответственно). В результате были получены циклические частоты $f_j^* = \omega_j^* / (2\pi)$, $j = 1, 2, 3$: $f_1^* = 44.987$ Гц, $f_2^* = 281.928$ Гц и $f_3^* = 789.409$ Гц. Сравнение частот f_j и f_j^* свидетельствует, что значения f_j , как и следовало ожидать, получились несколько ниже (в среднем на 3.4%) соответствующих значений f_j^* . Отмеченный факт можно объяснить податливостью стержня и упругих прослоек при его двухстороннем закреплении на конечной длине l .

На рис. 2 представлены нормированные формы прогибов $W_1 = \tilde{w}_1/|\tilde{w}_1|_{\max}$ и $W_2 = \tilde{w}_2/|\tilde{w}_2|_{\max}$ незакрепленного участка стержня при свободных его колебаниях на частотах $f_1 = 43.374$ Гц и $f_2 = 272.413$ Гц соответственно. Значения \tilde{w}_1 и \tilde{w}_2 на каждой частоте были определены с использованием зависимости (32) при постоянных g_1, \dots, g_4 , найденных в результате модального анализа стержня.

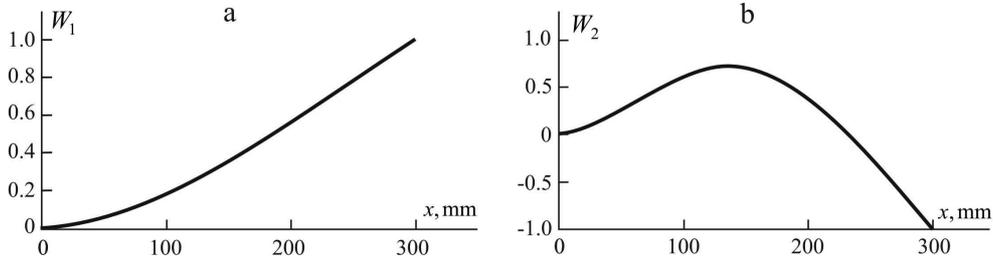


Рис. 2. Нормированные формы прогибов W_1 (a) и W_2 (b) незакрепленного участка стержня

Эксперимент 2. Была определена динамическая реакция прежнего стержня-полосы при резонансных колебаниях, возбуждаемых поверхностной нагрузкой $p_z = \tilde{p}_z e^{i\omega\tau}$ с амплитудой $p_z = 64$ Н/м² и круговой частотой $\omega = \omega_j = 2\pi f_j$, $j = 1, 2$. На рис. 3 приведены амплитуды резонансных колебаний \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 незакрепленного участка стержня на частотах $f_1 = 43.374$ Гц и $f_2 = 272.413$ Гц соответственно, по форме совпадающие (с точностью до множителя) с соответствующими формами W_1, W_2 свободных колебаний (рис. 2), что находится в соответствии с известным в теории колебаний положением о подобии отмеченных форм.

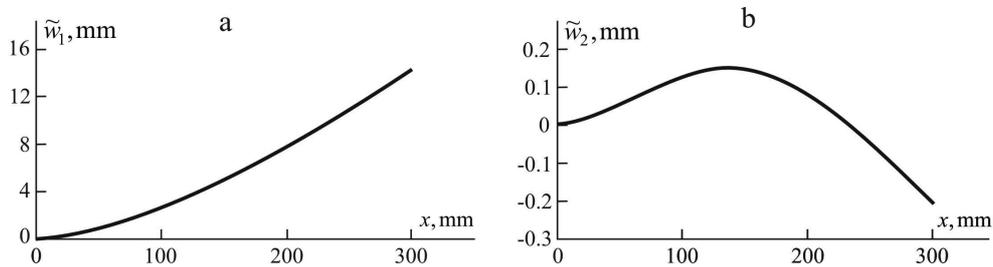


Рис. 3. Амплитуды резонансных колебаний \tilde{w}_1 (a) и \tilde{w}_2 (b) незакрепленного участка стержня

На рис. 4 приведены амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}, \tilde{\sigma}_x$ на поверхности $z = h/2$, соответственно, закрепленного и незакрепленного участков при резонансных колебаниях стержня на частотах f_1 и f_2 . В обоих случаях наблюдаются ярко выраженная локализация значений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ вблизи сечения $x = 0$ закрепленного участка стержня и их стремление к нулю по мере приближения к сечению $x = -l = -50$ мм. В сечении $x = 0$ при переходе от закрепленного участка к незакрепленному напряжения $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ и $\tilde{\sigma}_x$ получаются одинаковыми, что находится в соответствии с силовыми условиями сопряжения (23) отмеченных участков.

На рис. 5 представлены амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ и $\tilde{\sigma}_{xz}$, соответственно, на закрепленном и незакрепленном участках стержня при его резонансных колебаниях на частотах f_1 и f_2 , а также амплитуды касательных напряжений в упругих прослойках, которые на основании зависимостей (6) получаются

одинаковыми (при $u^{(0)} = 0$) и обозначены как $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$. В обоих случаях наблюдается локализация отмеченных амплитуд напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ и $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$ вблизи сечения $x = 0$ закрепленного участка стержня и их стремление к нулю по мере удаления от данного сечения. При переходе от закрепленного участка стержня к незакрепленному касательные напряжения в стержне испытывают ярко выраженную трансформацию, обусловленную различием моделей деформирования отмеченных участков стержня. При этом наиболее значительной она является при резонансных колебаниях стержня на частоте f_1 (рис. 5, а), при которой максимальное по модулю значение $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ на закрепленном участке стержня примерно в пятнадцать раз превышает максимальное значение $\tilde{\sigma}_{xz}$ на незакрепленном участке, что важно при расчете однонаправленно армированных композитных стержней, разрушение которых в основном происходит за счет напряжений поперечного сдвига σ_{xz} .

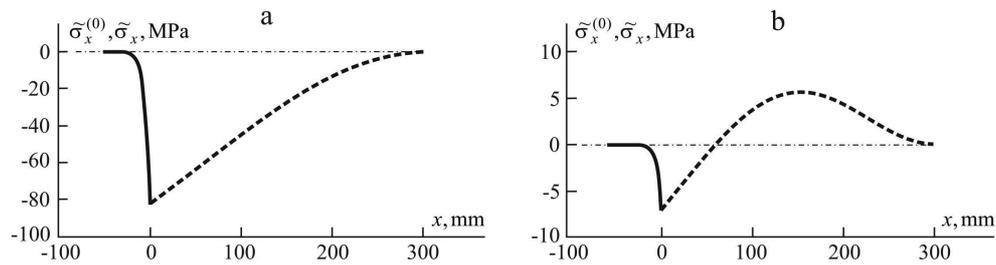


Рис. 4. Амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ (сплошные линии) и $\tilde{\sigma}_x$ (пунктирные линии) на поверхности $z = h/2$ при резонансных колебаниях стержня на частотах f_1 (а) и f_2 (б)

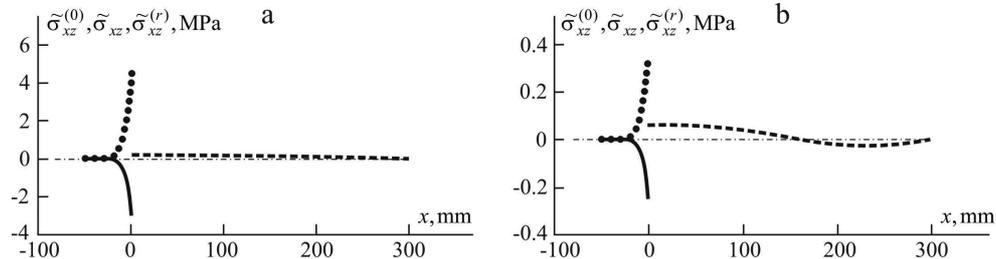


Рис. 5. Амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ (сплошные линии), $\tilde{\sigma}_{xz}$ (пунктирные линии) и $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$ (точки) при резонансных колебаниях стержня на частотах f_1 (а) и f_2 (б)

Заключение

Построена простейшая трансформационная модель динамического деформирования стержня-полосы, закрепленного на двухстороннем опорном элементе конечной длины через упругие прослойки. При ее построении на участке закрепления прогибы стержня и прослоек считаются нулевыми, а для перемещений в осевом направлении в пределах толщин стержня и прослоек приняты аппроксимации по сдвиговой модели С.П. Тимошенко, подчиненные условиям непрерывности в точках их соединения между собой и неподвижности в точках соединения прослоек с опорным элементом. На незакрепленном участке использована классическая геометрически линейная модель Кирхгофа – Лява.

Сформулированы условия кинематического сопряжения незакрепленного и закрепленного участков стержня, при учете которых, исходя из вариационного принципа Даламбера – Лагранжа, получены уравнения движения незакрепленного и закрепленного участков стержня и граничные условия к ним, а также силовые условия сопряжения отмеченных участков. На основе этих уравнений получены точные аналитические решения задач о свободных и вынужденных гармонических колебаниях рассматриваемого стержня. Показано, что в рамках используемых моделей деформирования задачи о продольных и изгибных колебаниях стержня разделяются. Из них наибольший практический интерес представляют изгибные колебания, происходящие в сравнительно низком диапазоне частот.

Проведены вычислительные эксперименты по определению собственных форм и частот изгибных колебаний, а также динамической реакции при резонансных колебаниях стержня-полосы, выполненного из однонаправленного волокнистого композита на основе углеродной ЭЛУР-II и связующего ХТ-118. Показана существенная трансформация напряжений поперечного сдвига в стержне при переходе от закрепленного участка стержня к незакрепленному, обусловленная различием моделей деформирования отмеченных участков стержня. При этом наиболее значительной она является при резонансных колебаниях стержня на частоте f_1 (рис. 5, а), при которой максимальная по модулю амплитуда касательного напряжения $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ на закрепленном участке стержня примерно в пятнадцать раз превышает аналогичную амплитуду $\tilde{\sigma}_{xz}$ на незакрепленном участке.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 23-19-00021 и за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. *Algazin S.D., Selivanov I.A.* Natural vibration of a rectangular plate with mixed boundary conditions // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2021. V. 62, No 2. P. 238–244. <https://doi.org/10.1134/S0021894421020073>.
2. *Algarray A.F.A., Jun H., Mahdi I.-E.M.* Effects of end conditions of cross-ply laminated composite beams on their dimensionless natural frequencies // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2017. V. 58, No 6. P. 1108–1114. <https://doi.org/10.1134/S0021894417060177>.
3. *Krylova E.Yu., Papkova I.V., Erofeev N.P., Zakharov V.M., Kryz'ko V.A.* Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2016. V. 57, No 4. P. 714–719. <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>.
4. *Tüfekci M., Dear J.P., Salles L.* Forced vibration analysis of beams with frictional clamps // Appl. Math. Modell. 2024. V. 128. P. 450–469. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.01.031>.
5. *Banks H.T., Inman D.J.* On damping mechanisms in beams // J. Appl. Mech. 1991. V. 58, No 3. P. 716–723. <https://doi.org/10.1115/1.2897253>.
6. *Asadi K., Ahmadian H., Jalali H.* Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface // J. Sound Vib. 2012. V. 331, No 2. P. 4704–4712. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.026>.

7. *Ferri A.A., Bindemann A.C.* Damping and vibrations of beams with various types of frictional support conditions // *J. Vib. Acoust.* 1992. V. 114, No 3. P. 289–296. <https://doi.org/10.1115/1.2930260>.
8. *Paimushin V.N., Shishkin V.M.* Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2023. V. 64, No 2. P. 308–324. <https://doi.org/10.1134/S0021894423020153>.
9. *Paimushin V.N., Shishkin V.M.* Refined model of dynamic deformation of a flat rod with a finite-length fixed region on an outer surface // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2024. V. 65, No 1. P. 161–175. <https://doi.org/10.1134/S0021894424010176>.
10. *Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R.K.* Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments // *Z. Angew. Math. Mech.* 2024. V. 104, No 2. Art. e202300214. <https://doi.org/10.1002/zamm.202300214>.
11. *Yankovskii A.P.* Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 1. General theories of high order // *Mech. Compos. Mater.* 2020. V. 56, No 3. P. 271–290. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09880-8>.
12. *Yankovskii A.P.* Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 2. Particular low-order theories // *Mech. Compos. Mater.* 2020. V. 56, No 4. P. 437–454. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09895-1>.
13. *Паймушин В.Н., Фирсов В.А.* Оболочки из стекла. Расчет напряженно-деформированного состояния. М.: Машиностроение, 1993. 208 с.
14. *Паймушин В.Н., Шижкин В.М.* Трансформационная модель деформирования стержня-полосы, закрепленного на двухсторонних скользящих опорах // *ППП.* 2024. Т. 86, № 2. С. 437–454. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-2-215-234>.
15. *Norrie D.H., de Vries G.* An Introduction to Finite Element Analysis. New York, NY, San Francisco, CA, London: Acad. Press, 1978. 314 p.
16. *Zienkiewicz O.C.* The Finite Element Method in Engineering Science. Morice P.B. (Ed.). London: McGraw-Hill, 1971. xiv, 521 p.
17. *Цейтлин А.И.* Об учете внутреннего трения в нормативных документах по динамическому расчету сооружений // *СМРС.* 1981. № 4. С. 33–38.
18. *Сорокин Е.С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131 с.
19. *Василенко Н.В.* Учет несовершенной упругости материала при механических колебаниях методом комплексных модулей. В кн.: «Рассеяние энергии при колебаниях механических систем». Киев: Наук. думка. 1974. С. 5–12.
20. *Rikards R.B., Barkanov E.N.* Determination of the dynamic characteristics of vibration-absorbing coating by the finite-element method // *Mech. Compos. Mater.* 1992. V. 27, No 5. P. 529–534. <https://doi.org/10.1007/BF00613477>.
21. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A.* Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder // *Mech. Compos. Mater.* 2018. V. 54, No 1. P. 2–12. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9712-1>.
22. *Shoup T.E.* A Practical Guide to Computer Methods for Engineers. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1979. 255 p.
23. *Хазанов Х.С.* Механические колебания систем с распределенными параметрами. Учебн. пособие. 1979. Самара: СГАУ, 2002. 82 с.

Поступила в редакцию 22.06.2024

Принята к публикации 6.08.2024

Паймушин Виталий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прочность конструкций»; главный научный сотрудник Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский национальный исследовательский технический университет

им. А.Н.Туполева

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *vpajmushin@mail.ru*

Шишкин Виктор Михайлович, доктор технических наук, профессор кафедры «Механика и инженерная графика»

Вятский государственный университет

ул. Московская, д. 36, г. Киров, 610000, Россия

E-mail: *vshishkin1951@mail.ru*

Чумакова Софья Федоровна, студент

Государственный университет по землеустройству

ул. Казакова, д. 15, г. Москва, 105064, Россия

E-mail: *sfchumakova@mail.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 3, pp. 407–425

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.407-425

**Mathematical Modeling of the Dynamic Deformation of a Rod-Strip
Fixed on a Double-Sided Support Element through Elastic Interlayers**

V.N. Paimushin^{a,b}, V.M. Shishkin^{c**}, S.F. Chumakova^{d***}*

^a*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,
Kazan, 420111 Russia*

^b*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

^c*Vyatka State University, Kirov, 610000 Russia*

^d*State University of Land Use Planning, Moscow, 105064 Russia*

E-mail: **vpajmushin@mail.ru, **vshishkin1951@mail.ru, ***sfchumakova@mail.ru*

Received June 22, 2024; Accepted August 6, 2024

Abstract

The simplest transformation model of the dynamic deformation along the length of a rod-strip consisting of two segments was constructed. The model is based on the classical geometrically linear Kirchhoff–Love model for the unfixed segment, while the fixed segment of finite length is assumed to be connected to a rigid and immovable support element through elastic interlayers. On the fixed segment, the deflections of the rod and interlayers were

considered zero. For axial displacements within the thicknesses of the rod and interlayers, approximations were adopted according to S.P. Timoshenko's shear model, subject to the conditions of continuity at the points where they connect to each other and immobility at the points where the interlayers connect to the support element. The conditions for kinematic coupling of the unfixed and fixed segments of the rod were formulated. Taking them into account and using the D'Alembert–Lagrange variational principle, the equations of motion and boundary conditions for the considered segments were derived, and the conditions for force coupling of the segments were obtained. With the help of the derived equations, exact analytical solutions of the problems of free and forced harmonic vibrations of the rod of the studied type were found. These solutions were employed in the numerical experiments to determine the natural modes and frequencies of bending vibrations, as well as the dynamic response during the resonant vibrations of the rod-strip made of a unidirectional fibrous composite based on ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. The findings show a significant transformation of transverse shear stresses when passing through the boundary from the unfixed segment of the rod to the fixed one, as well as their pronounced localization in the region of the fixed segment near this boundary.

Keywords: vibrations, rod-strip, S.P. Timoshenko's model, unfixed segment, fixed segment, equation of motion, kinematic conditions for coupling of segments, force conditions for coupling of segments, analytical solutions

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-19-00021) and by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program ("PRIORITY-2030").

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Scheme for fixing the rod-strip in the support element 3 through the elastic interlayers 1 and 2.

Fig. 2. Normalized deflection shapes W_1 (a) and W_2 (b) of the unfixed rod segment.

Fig. 3. Resonant vibration amplitudes \tilde{w}_1 (a) and \tilde{w}_2 (b) of the unfixed rod segment.

Fig. 4. Normal stress amplitudes $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ (solid lines) and $\tilde{\sigma}_x$ (dashed lines) on the surface $z = h/2$ during resonant vibrations of the rod at the frequencies f_1 (a) and f_2 (b).

Fig. 5. Shear stress amplitudes $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ (solid lines), $\tilde{\sigma}_{xz}$ (dashed lines), and $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$ (dots) during resonant vibrations of the rod at the frequencies f_1 (a) and f_2 (b).

References

1. Algazin S.D., Selivanov I.A. Natural vibration of a rectangular plate with mixed boundary conditions. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 2, pp. 238–244. <https://doi.org/10.1134/S0021894421020073>.
2. Algarray A.F.A., Jun H., Mahdi I.-E.M. Effects of end conditions of cross-ply laminated composite beams on their dimensionless natural frequencies. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2017, vol. 58, no. 6, pp. 1108–1114. <https://doi.org/10.1134/S0021894417060177>.
3. Krylova E.Yu., Papkova I.V., Erofeev N.P., Zakharov V.M., Krys'ko V.A. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 4, pp. 714–719. <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>.
4. Tüfekci M., Dear J.P., Salles L. Forced vibration analysis of beams with frictional clamps. *Appl. Math. Modell.*, 2024, vol. 128, pp. 450–469. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.01.031>.
5. Banks H.T., Inman D.J. On damping mechanisms in beams. *J. Appl. Mech.*, 1991, vol. 58, no. 3, pp. 716–723. <https://doi.org/10.1115/1.2897253>.

6. Asadi K., Ahmadian H., Jalali H. Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface. *J. Sound Vib.*, 2012, vol. 331, no. 2, pp. 4704–4712. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.026>.
7. Ferri A.A., Bindemann A.C. Damping and vibration of beams with various types of frictional support conditions. *J. Vib. Acoust.*, 1992, vol. 114, no. 3, pp. 289–296. <https://doi.org/10.1115/1.2930260>.
8. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2023, vol. 64, no. 2, pp. 308–324. <https://doi.org/10.1134/S0021894423020153>.
9. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Refined model of dynamic deformation of a flat rod with a finite-length fixed region on an outer surface. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2024, vol. 65, no. 1, pp. 161–175. <https://doi.org/10.1134/S0021894424010176>.
10. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R.K. Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2024, vol. 104, no. 2, art. e202300214. <https://doi.org/10.1002/zamm.202300214>.
11. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 1. General theories of high order. *Mech. Compos. Mater.*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 271–290. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09880-8>.
12. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 2. Particular low-order theories. *Mech. Compos. Mater.*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 437–454. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09895-1>.
13. Paimushin V.N., Firsov V.A. *Obolochki iz stekla. Raschet napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya* [Glass Shells. Calculation of the Stress-Strain State]. Moscow, Mashinostroenie, 1993. 208 p. (In Russian)
14. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Transformational model of a plane rod deformation, restrained on double-sided sliding supports. *Probl. Prochn. Plast.*, 2024, vol. 86, no. 2, pp. 437–454. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-2-215-234>. (In Russian)
15. Norrie D.H., de Vries G. *An Introduction to Finite Element Analysis*. New York, NY, San Francisco, CA, London, Acad. Press, 1978. 314 p.
16. Zienkiewicz O.C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. Morice P.B. (Ed.). London, McGraw-Hill, 1971. xiv, 521 p.
17. Tseitlin A.I. On considering internal friction in the normative documents for the dynamic design of structures. *Stroit. Mekh. Rascheta Sooruzh.*, 1981, no. 4, pp. 33–38. (In Russian)
18. Sorokin E.S. *K teorii vnutrennego treniya pri kolebaniyakh uprugikh sistem* [On the Theory of Internal Friction during Vibrations of Elastic Systems]. Moscow, Gosstroizdat, 1960. 131 p. (In Russian)
19. Vasilenko N.V. Considering the imperfect elasticity of materials in mechanical vibrations using the complex modulus method. In: *Rasseyaniye energii pri kolebaniyakh mekhanicheskikh sistem* [Energy Dissipation in Vibrations of Elastic Systems]. Kyiv, Nauk. Dumka, 1974, pp. 5–12. (In Russian)
20. Rikards R.B., Barkanov E.N. Determination of the dynamic characteristics of vibration-absorbing coating by the finite-element method. *Mech. Compos. Mater.*, 1992, vol. 27, no. 5, pp. 529–534. <https://doi.org/10.1007/BF00613477>.
21. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 2–12. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9712-1>.

22. Shoup T.E. *A Practical Guide to Computer Methods for Engineers*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1979. 255 p.
23. Khazanov Kh.S. *Mekhanicheskie kolebaniya sistem s raspredeleennymi paramterami* [Mechanical Vibrations of Systems with Distributed Parameters]. Samara, SGAU, 2002. 82 p. (In Russian)

Для цитирования: Паймушин В.Н., Шишкин В.М., Чумакова С.Ф. Математическое моделирование динамического деформирования стержня-полосы, закрепленного на двухстороннем опорном элементе через упругие прослойки // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 407–425.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.407-425>.

For citation: Paimushin V.N., Shishkin V.M., Chumakova S.F. Mathematical modeling of the dynamic deformation of a rod-strip fixed on a double-sided support element through elastic interlayers. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 407–425.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.407-425>. (In Russian)